Rencontres Nationales sur le Génie Civil - RNGC'2014
Béjaia, les 22 & 23 Octobre 2014

Couplage FEM/BEM-Symétrique en interaction fluide-structure

Formulation BEM symétrique – Matrice de raideur de frontière

Abdelghani SEGHIR

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Département de Génie Civil
Université de Béjaia

Plan

- Introduction
- Formulation en BEM symétrique - Matrice raideur de frontière
  - Energie potentielle de Frontière
  - Symétrie de la formulation
  - Discrétisation
  - Matrice de Raideur de Frontière
- Couplage Fluide - Structure
  - Couplage sans ballottement
  - Couplage avec ballottement
- Validation & Application
  - Validation
  - Application au cas des barrages
  - Application au cas des réservoirs
- Conclusion

Objectif

Objectif du travail :

Développer une formulation en éléments de frontière (BEM) symétrique qui produit :

- Une matrice symétrique définie positive

- Un système algébrique similaire à celui de la méthode des éléments finis (FEM)

Mettre en œuvre Modèle de couplage FEM / BEM pour l'interaction fluide-structure (IFS)

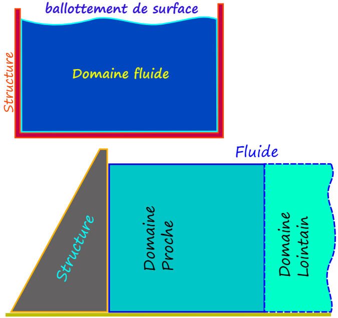
Hypothèse : Le fluide est supposé incompressible
Hypothèse admissible dans les cas traités

Objectif

Problèmes typiques d'IFS :

Barrage poids en béton – Réservoir de stockage

- Structure : FEM
- Fluide : Domaine confiné ou ouvert
  - Réservoir : *Domaine confiné*
    Ballottement de la surface libre
  - Barrage : *Domaine Ouvert*
    Région proche + Région loin
    - Model 1 : FEM
    - Model 2 : FEM + Eléments Infini
    - Model 3 : BEM (Formulation symétrique)



Couplage FEM/BEM et IFS

Le couplage des deux méthodes FEM/BEM : Prendre quelques précautions :
- Système matriciel résultant : matrices couplées symétriques ou non symétriques, creuses ou pleines, ...
- Type du couplage :
Forcer le système de l'une des méthodes à prendre la forme de celui de l'autre méthode
Couplage Iteratif,
Couplage direct avec manipulations matricielle

La contribution :

Une formulation BEM qui préserve la symétrie

- Basée sur la discrétisation de l'énergie potentielle de frontière

-Produit une matrice de raideur de frontière (commd FEM)

Simplifie le couplage direct FEM/BEM

Energie potentielle de frontière

Principe : Discrétiser la fonction d'énergie potentielle de frontière W qui produit un accroissement linéaire de la pression (de 0 à p) en tout point $\mathbf{y}$ de $\partial\Omega_F$:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} q(\mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) \ \mathrm{d}S_y$$

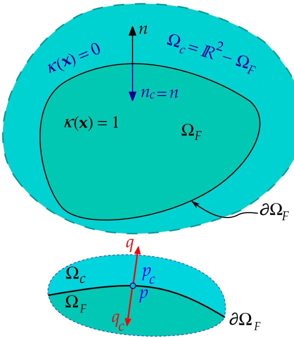
Représentation intégrale de frontière indirecte

Pression :

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_F} G(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \phi(\mathbf{z}) \ \mathrm{d}S_z$$

Gradient de la pression :

$$q(\mathbf{y}) = \frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})} = \int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{x}) \ \mathrm{d}S_x$$



Potentiel de simple couche : $\phi(\mathbf{y}) = q(\mathbf{y}) - q_c(\mathbf{y})$

Au passage de la frontière : saut du gradient et continuité de la pression $p(\mathbf{y}) - p_c(\mathbf{y}) = 0$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$: Fonction de Green et $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{n}(\mathbf{y})$ (gradient)

Energie potentielle de frontière : Régularisation - Symétrie

Passage à la limite : $\mathbf{x}\,,\,\mathbf{z}\;\rightarrow\;\partial\Omega_F$

Expression régularisée

$$W = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_F}\phi(\mathbf{x})\int_{\partial\Omega_F} H(\mathbf{x},\mathbf{y})\,[p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{x})]\;\mathrm{d}S_y\;\mathrm{d}S_x$$

avec :

$$p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_F}\phi(\mathbf{z})\,[G(\mathbf{z},\mathbf{y}) - G(\mathbf{z},\mathbf{x})]\;\mathrm{d}S_z$$

L'expression est symétrique
Une paire de points $(\mathbf{x},\mathbf{z}) \in \partial\Omega_F$, une paire de sources $\phi(\mathbf{x})$ et $\phi(\mathbf{z})$

$$W(\phi(\mathbf{x}),\phi(\mathbf{z})) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_F}\int_{\partial\Omega_F}\mathfrak{K}(\mathbf{x},\mathbf{z})\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{z})\;\mathrm{d}S_x\;\mathrm{d}S_z$$

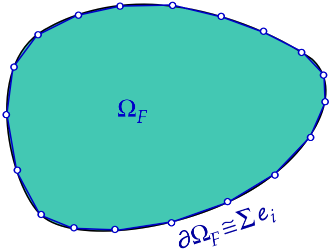
Peut être vérifiée par la symétrie du noyau

$$\mathfrak{K}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \int_{\partial\Omega_F} G(\mathbf{z},\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})}dS_y = \int_{\partial\Omega_F} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}(\mathbf{y})}dS_y = \mathfrak{K}(\mathbf{z},\mathbf{x})$$

Energie potentielle de frontière : Discrétisation

Approximation des potentiels :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\mathbf{x})\phi_i \equiv \mathbf{N}_i \boldsymbol{\phi}_{e_i}$$



Discrétisation de l'énergie

$$W = \frac{1}{2} \sum_{e_i=1}^{n_e} \sum_{e_j=1}^{n_e} \int_{e_i} \int_{e_j} \mathbf{N}_i \, \boldsymbol{\phi}_{e_i} \mathfrak{I}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \partial\Omega_F) \mathbf{N}_j \boldsymbol{\phi}_{e_j} \, \mathrm{d}S_x \, \mathrm{d}S_z$$

avec :

$$\mathfrak{I}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \partial\Omega_F) \approx \sum_{e_k} \int_{e_k} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \big(G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \big) \, \mathrm{d}S_y$$

Forme matricielle

Elémentaire : $W_e = \boldsymbol{\phi}_j^T \boldsymbol{A}_{ij}^{(e)} \boldsymbol{\phi}_i$ Assemblée : $W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{\phi}$

Matrice de raideur de frontière

Elimination de ϕ

A partir de la représentation intégrale de frontière indirecte de p

$$p(\mathbf{y}) = \int_{\partial\Omega_F} G(\mathbf{y}, \mathbf{z})\phi(\mathbf{z})\ \mathrm{d}S_z$$

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\phi} \qquad\qquad \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{G}^{-1}\mathbf{P}$$

d'où :

$$W = \frac{1}{2}\{\mathbf{P}\}^T\left[\mathbf{G}^{-1}\right]^T[\mathbf{A}]\left[\boldsymbol{G}^{-1}\right]\{\mathbf{P}\}$$

$$W = \frac{1}{2}\{\mathbf{P}\}^T[\mathbf{K}_B]\{\mathbf{P}\}$$

$$\boxed{\mathbf{K}_B = \left[\boldsymbol{G}^{-1}\right]^T[\boldsymbol{A}]\left[\boldsymbol{G}^{-1}\right]}$$

Matrice de raideur de frontière

Vecteur Force - Système d'équation

Le vecteur Force

A partir de la discrétisation de la définition de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_F} q(\mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) \; \mathrm{d}S_y$$

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \; \mathbf{F}_q$$

$$\mathbf{F}_q = \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{N}^T q(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}S_y$$

Egalité entre les deux expressions de W (avec élimination de $\mathbf{P}^T$)

donne le système d'équation linéaire

$$\mathbf{K}_B \; \mathbf{P} = \mathbf{F}_q$$

Système équivalent à celui de la MEF

Interaction Fluide-Structure : Equation BEM du fluide

Gradients des pressions : $q(y)$ sont causés par des accélérations de parois : $\ddot{\mathbf{u}}(y, t)$

CAL : $q(y) = -\rho\ddot{\mathbf{u}}(t, y) \cdot \mathbf{n}$

avec : $\ddot{\mathbf{u}} = \sum \boldsymbol{N}_u(y)\ddot{\mathbf{U}}(t)$
$\boldsymbol{N}_u(y)$: fonction de forme

Le système algébrique devient :

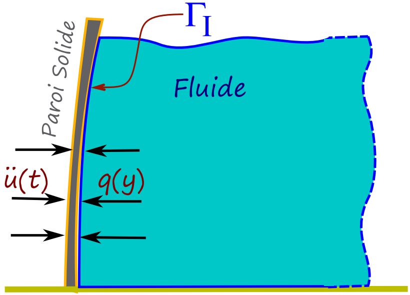
$$\mathbf{K}_F\mathbf{P} = -\rho\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Gamma_\mathrm{I}} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N}_u\mathbf{n}\, \mathrm{d}\Gamma$$

d'où

$$\mathbf{P} = -\rho\,\mathbf{K}_F^{-1}\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{U}}$$

$\mathbf{Q}$ Matrice d'IFS liant $\partial p/\partial\mathbf{n}$ à $\ddot{\mathbf{u}}(t)$



Equation MEF de la structure

Modèle MEF de la structure

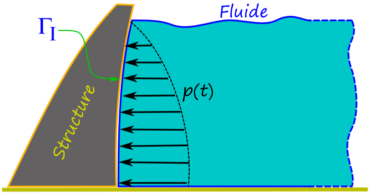
$$\mathbf{M}_S\ \ddot{\mathbf{U}}_T + \mathbf{C}_S\ \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_S\ \mathbf{U} = \mathbf{F}_p$$

avec

$$\mathbf{F}_P = \int_{\Gamma_\mathrm{I}} \mathbf{N}_\mathbf{u}^T \mathbf{n}\, p(t)\ \mathrm{d}\Gamma$$

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{Q}^T\ \mathbf{P}$$

Force des pressions hydrodynamiques



Accélérations sismiques $\ddot{x}_g(t)$

$$\mathbf{M}_A\ \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_S\ \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_S\ \mathbf{U} = -\mathbf{M}_A \mathbf{I}\ \ddot{x}_g(t)$$

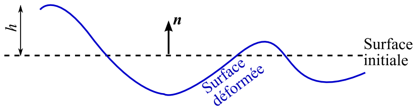
$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_S + \rho \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_F^{-1} \mathbf{Q}$$

$\mathbf{M}_A$ Matrice masse ajoutée du système couplé

Condition d'ondes de surface linéarisée

A la surface libre les gradients des pressions : $q(y)$ sont reliés aux secondes dérivées des pressions : $\ddot{\mathbf{p}}$

$$q(y) = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$



Après discrétisation donne une matrice Masse associée aux œuds de la surface libre

$$\mathbf{M}_F = -\int_{surface} \mathbf{N}^T \frac{1}{g} \mathbf{N} \, \mathrm{d}S$$

Equation de mouvement du fluide devient

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{K}_F \mathbf{P} + \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{0}$$

Système couplé

Le système couplé :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M_S} & \mathbf{0} \\ \rho\mathbf{Q} & \mathbf{M_F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C_S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K_S} & -\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K_F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{M_S} \\ \rho\mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{I}\ddot{u}_g(t)$$

Système Non symétrique

Symétrisation par inversion de la matrice masse fluide

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K_S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{O} & \frac{1}{\rho}\mathbf{M_F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix}$$

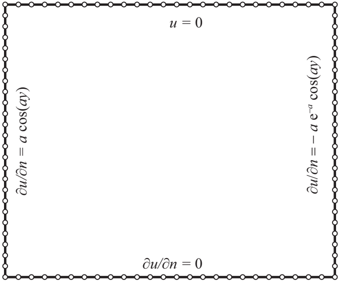
$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{K_S}\mathbf{M_S}^{-1}\mathbf{C_S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}\mathbf{M_S}^{-1}\mathbf{C_S} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{K_S}\mathbf{M_S}^{-1}\mathbf{K_S}^T & -\mathbf{K_S}\mathbf{M_S}^{-1}\mathbf{Q}^T \\ -\mathbf{Q}\mathbf{M_S}^{-1}\mathbf{K_S} & \mathbf{Q}\mathbf{M_S}^{-1}\mathbf{Q}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K_S} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{I}\ddot{u}_g(t)$$

Validation

Example :
Domaine carré de coté unité : 1×1 régit par l'équation de Laplace

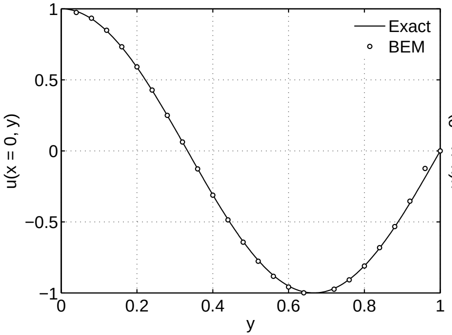
$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u_{\text{ex}} &= e^{-ax}\cos(ay) \\ a &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$



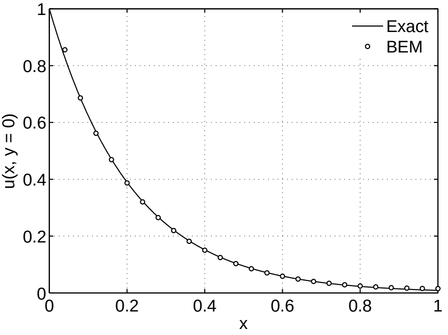
Discrétisation :
100 éléments de frontière, linéaires à 2 noeuds

But :
Retrouver la solution exacte sur les bords :
Gauche $u(x = 0, 0 \leq y \leq 1)$
Bas $u(0 \leq x \leq 1, y)$

Validation



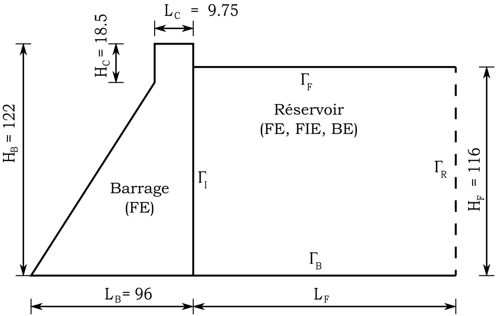
bord Gauche



bord Bas

Validation - Application

Le cas d'étude :
Barrage de Pine Flate (122 m)

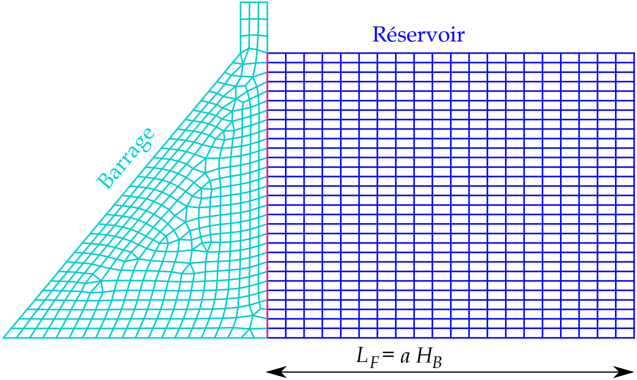


$E = 34.47\ GPa$
$\nu = 0.2$
$\rho_b = 2480\ Kg/m^3$

Deux positions de la troncature :
Très Proche $L_F = 0.25 H_B$
Assez loin $L_F = 3 H_B$

Application - Modèles

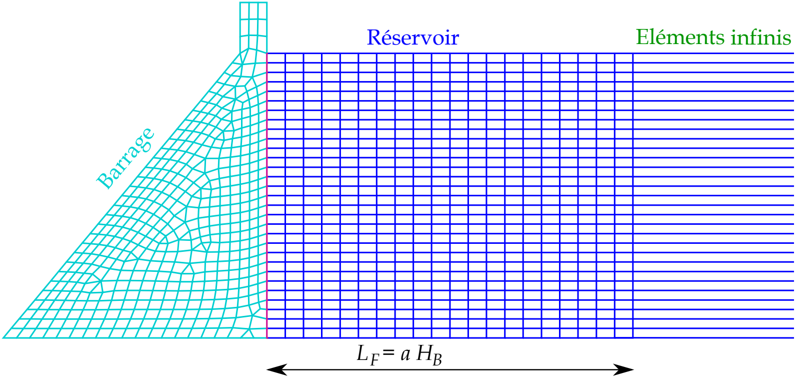
1 Modèle FE-FE : Réservoir modélisé par des éléments finis



Valeurs représentatives : $a = 0.25$ (très rapprochée) et $a = 3$ (assez éloignée)

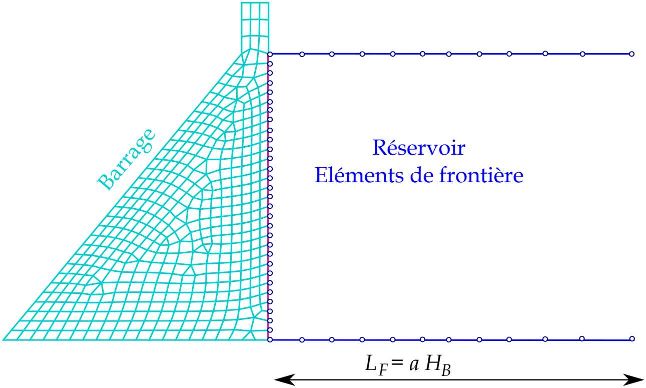
Application - Modèles

2 Modèle FE-IE : Extension du maillage avec des éléments infinis



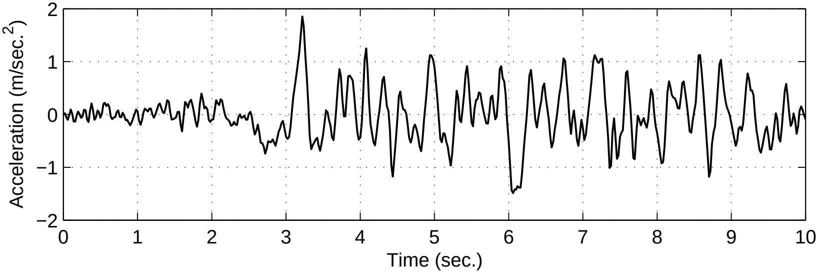
Application - Modèles

3 Modèle FE-BE : Réservoir modélisé par la matrice de raideur de frontière (La présente contribution)



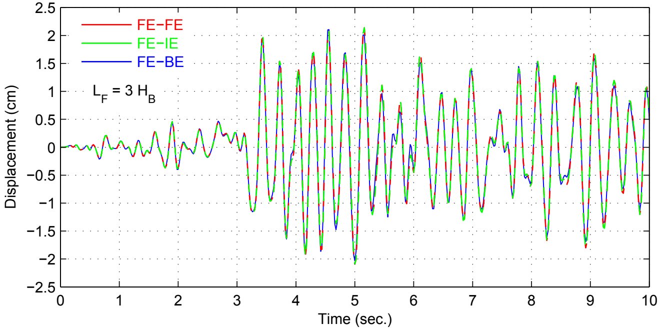
Réponse temporelle

Accélérogramme :
Taft Station Kern Country 21/07/1952
PGA = 0.19 g



Réponse temporelle $\mathrm{L_F = 3H_B}$

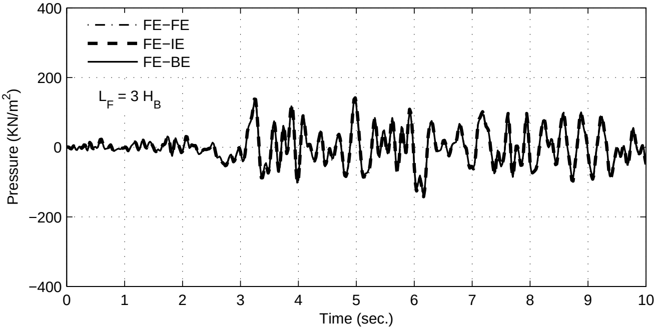
Déplacements en crête



Avec une troncature assez éloignée de la structure ($L_F = 3H_B$)
Tous les modèles d'interaction donnent la même réponse
Déplacement maximal : $u_{\max} = 2.2\ cm$

Réponse temporelle $L_F = 3H_B$

Pressions au fond



Même constat pour les pressions
Pression maximale : $p_{\max} = 170\ KPa$

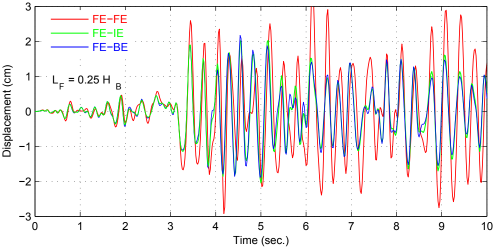
Réponse temporelle $L_F = 0.25\mathrm{H_B}$

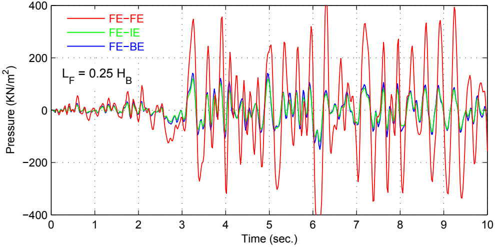
Pour : $L_F = \frac{1}{4}H_B$

FE-FE :
Amplifie la réponse
$u_{\max} \geq 3\ cm\ (\approx 35\%)$
$p_{\max} \geq 400KPa\ (\approx 130\%)$

FE-BI et FE-BE
Résultats proches
Mêmes que ceux du cas $L_F = 3H_B$
$u_{\max} \approx 2\ cm\ \&\ p_{\max} \approx 170\ KPa$

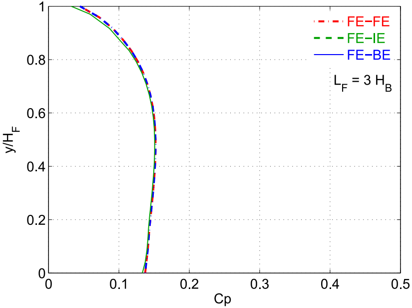
Pressions plus sensibles à L_F que les déplacements



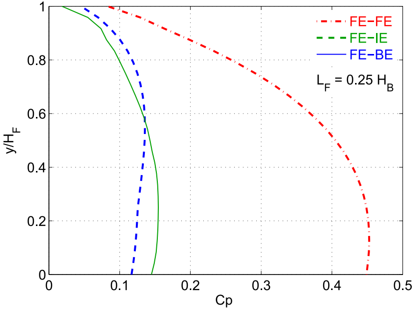


Réponse temporelle $L_F = 0.25\mathrm{H_B}$

Sensibilité :
Bien visible dans la répartition des pressions hydrodynamiques sur le parement



Troncature assez loin



Troncature très proche

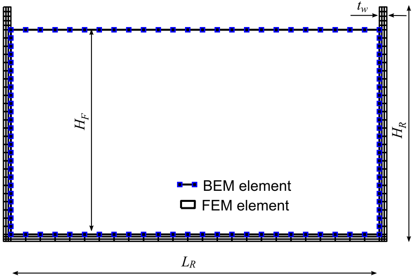
Cp : maximum des pressions normalisé par rapport à la pression hydrostatique au fond

La présente formulation BEM s'applique bien aux domaines ouverts (ne nécessite pas une troncature).

Cas des réservoirs

L'exemple traité :

Réservoir rectangulaire contenant de l'eau



Nbr MEF nodes : 120
Nbr BEF nodes : 100

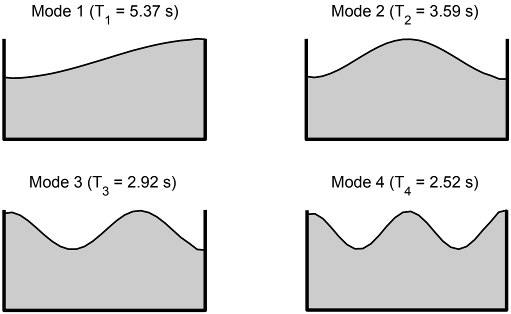
Réservoir :
Hauteur $H_R = 10\ m$
Longueur $L_R = 20\ m$
Module de Young $E = 32000\ MPa$
Coef Poisson $\nu = 0.2$
Poids volumique $\rho_s = 25KN/m^3$

Epaisseur des parois *variée*
Rigide : $t_w = 50\ cm$
$\pm$ rigide : $t_w = 40\ cm$
Flexible : $t_w = 30\ cm$

Eau :
Hauteur $H_R = 9\ m$
Poids volumique
$\rho = 10000KN/m^3$

Application au cas des réservoirs - Sloshing modes

Sloshing modes : cas de réservoir rigide

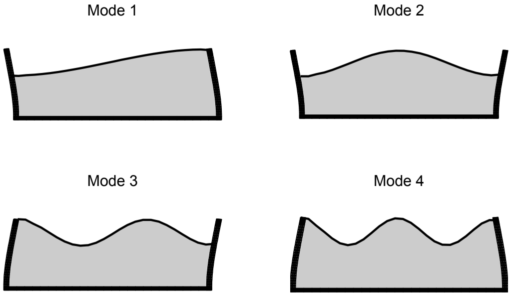


Mode	Exact	Présent	Différence(%)
1	5.370	5.370	0.00
2	3.592	3.594	0.07
3	2.923	2.921	0.05
4	2.531	2.521	0.40

Exact : $\omega_n^2 = g\,\frac{n\pi}{L_F}\tanh\left(\frac{n\pi}{L_F}H_s\right)$

Application au cas des réservoirs - Sloshing modes

Sloshing modes : case de réservoir flexible



Mode	$t_w = 50\ cm$	$t_w = 40\ cm$	$t_w = 30\ cm$
1	5.394	5.426	6.479
2	3.604	3.604	3.728
3	2.926	2.925	2.968
4	2.524	2.523	2.543

- Les modes de ballottement (sloshing) restent inchangés
- Les modes de déformations de la structure retrouvés dans le calcul couplé
- Flexibilité de parois : Agit uniquement sur le premier mode de ballotement (La période est un petit peu allongée)
- Les parois de 50 cm d'épaisseur sont assez rigides

Conclusion

L'espect le plus important du présent travail : Formulation symétrique en élément de frontière

- produit à une masse de raideur de frontière équivalente à celle de la MEF
- Le domaine délimité par la frontière peut être considéré comme un "super élement"
- Facilite le couplage FEM/BEM
- Applicable aux problèmes d'interaction fluide-structure (IFS)
- Evite le traitement de la frontière de troncature des domaines ouverts.

Fin

Merci

Pour votre aimable attention