Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Bejaia, Faculté des Sciences Exactes

Unité de Recherche LaMOS

# Analyse des Comportements Stratégiques et Recherche des Équilibres dans les Systèmes d'Attente Markoviens

Thèse de Doctorat en **Mathématiques Appliquées**, Option:
**Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision**

Présentée par: **Mr ZIANI Sofiane**
Encadrée par: **Professeur RADJEF Mohammed Said**

**Unité de recherche LaMOS**,
**Université de Bejaia**

06/11/2016

# Plan de travail


1 Introduction

2 Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
- Description du modèle
- Cas observable
- Cas non observable
- Effets de l'information

3 Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
- Description du modèle
- Modélisation sous forme de jeu
- Résolution du jeu
- Illustration

4 Conclusion

# Plan de travail


1. Introduction
2. Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
   - Description du modèle
   - Cas observable
   - Cas non observable
   - Effets de l'information
3. Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
   - Description du modèle
   - Modélisation sous forme de jeu
   - Résolution du jeu
   - Illustration
4. Conclusion

# Plan de travail


1. Introduction
2. Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
   - Description du modèle
   - Cas observable
   - Cas non observable
   - Effets de l'information
3. Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
   - Description du modèle
   - Modélisation sous forme de jeu
   - Résolution du jeu
   - Illustration
4. Conclusion

# Plan de travail


1. Introduction
2. Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
   - Description du modèle
   - Cas observable
   - Cas non observable
   - Effets de l'information
3. Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
   - Description du modèle
   - Modélisation sous forme de jeu
   - Résolution du jeu
   - Illustration
4. Conclusion

1 Introduction

2 Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
- Description du modèle
- Cas observable
- Cas non observable
- Effets de l'information

3 Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
- Description du modèle
- Modélisation sous forme de jeu
- Résolution du jeu
- Illustration

4 Conclusion

# Introduction

La recherche en théorie des files d'attente peut être classée comme suit (Hassin 2016) :

(1). Analyse de performances,

(2). Contrôle optimal,

(3). Analyse des comportements stratégiques.

## Introduction

- Etude des systèmes d'attente d'un point de vue économique.
- Structure récompense-coût.
- Comportements stratégiques des clients.
- Décision des clients : rejoindre ou non le système, acheter la priorité, choisir un fournisseur de service, etc.
- D'autres agents : serveur, gestionnaire du système : Fixer un taux de service, contrôle d'admission, choisir un type d'information, etc.
- Deux types de systèmes selon leur observabilité : systèmes observables et systèmes non observables.

## Introduction

- Etude des systèmes d'attente d'un point de vue économique.
- Structure récompense-coût.
- Comportements stratégiques des clients.
- Décision des clients : rejoindre ou non le système, acheter la priorité, choisir un fournisseur de service, etc.
- D'autres agents : serveur, gestionnaire du système : Fixer un taux de service, contrôle d'admission, choisir un type d'information, etc.
- Deux types de systèmes selon leur observabilité : systèmes observables et systèmes non observables.

## Introduction

- Etude des systèmes d'attente d'un point de vue économique.
- Structure récompense-coût.
- Comportements stratégiques des clients.
- Décision des clients : rejoindre ou non le système, acheter la priorité, choisir un fournisseur de service, etc.
- D'autres agents : serveur, gestionnaire du système : Fixer un taux de service, contrôle d'admission, choisir un type d'information, etc.
- Deux types de systèmes selon leur observabilité : systèmes observables et systèmes non observables.

## Introduction

- Etude des systèmes d'attente d'un point de vue économique.
- Structure récompense-coût.
- Comportements stratégiques des clients.
- Décision des clients : rejoindre ou non le système, acheter la priorité, choisir un fournisseur de service, etc.
- D'autres agents : serveur, gestionnaire du système : Fixer un taux de service, contrôle d'admission, choisir un type d'information, etc.
- Deux types de systèmes selon leur observabilité : systèmes observables et systèmes non observables.

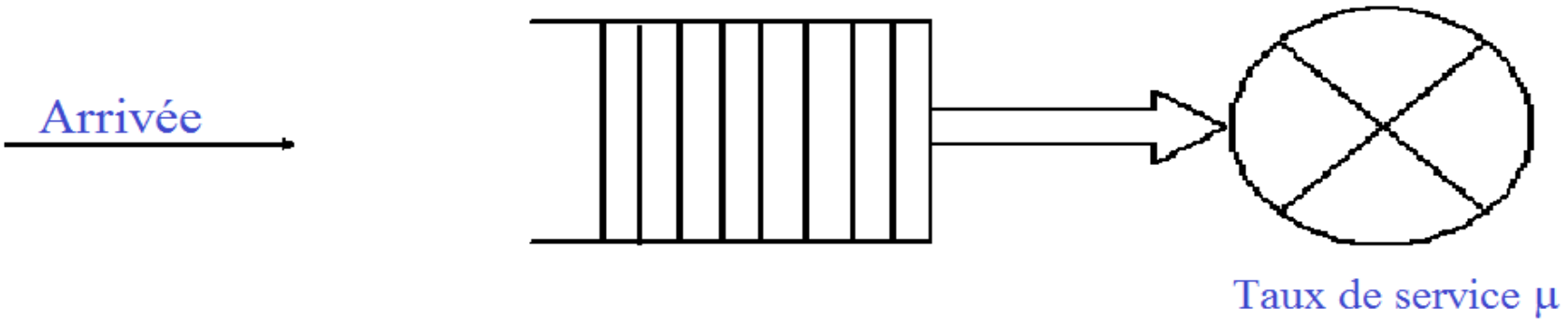
## Introduction

- Etude des systèmes d'attente d'un point de vue économique.
- Structure récompense-coût.
- Comportements stratégiques des clients.
- Décision des clients : rejoindre ou non le système, acheter la priorité, choisir un fournisseur de service, etc.
- D'autres agents : serveur, gestionnaire du système : Fixer un taux de service, contrôle d'admission, choisir un type d'information, etc.
- Deux types de systèmes selon leur observabilité : systèmes observables et systèmes non observables.

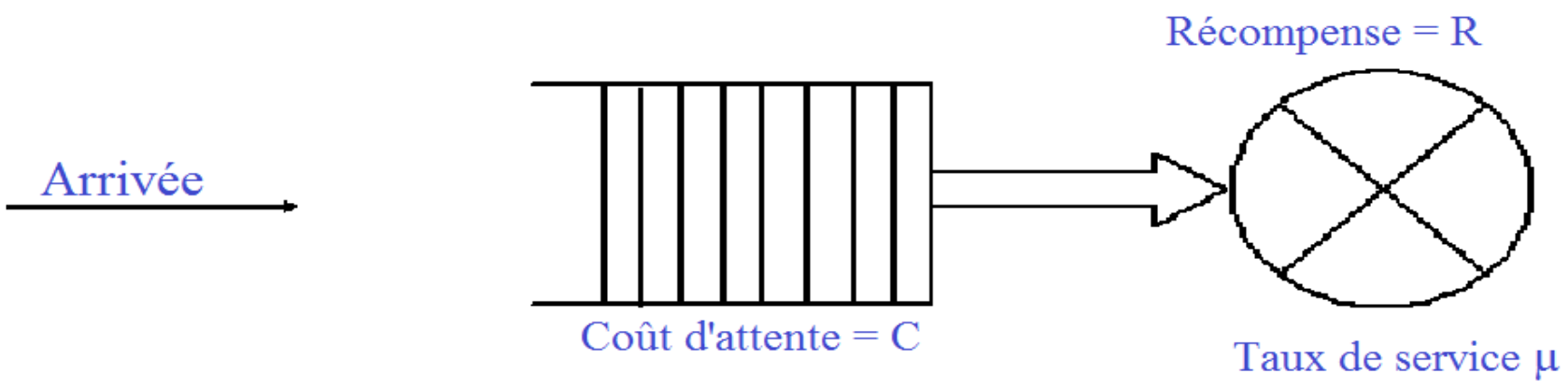
## Introduction

- Etude des systèmes d'attente d'un point de vue économique.
- Structure récompense-coût.
- Comportements stratégiques des clients.
- Décision des clients : rejoindre ou non le système, acheter la priorité, choisir un fournisseur de service, etc.
- D'autres agents : serveur, gestionnaire du système : Fixer un taux de service, contrôle d'admission, choisir un type d'information, etc.
- Deux types de systèmes selon leur observabilité : systèmes observables et systèmes non observables.

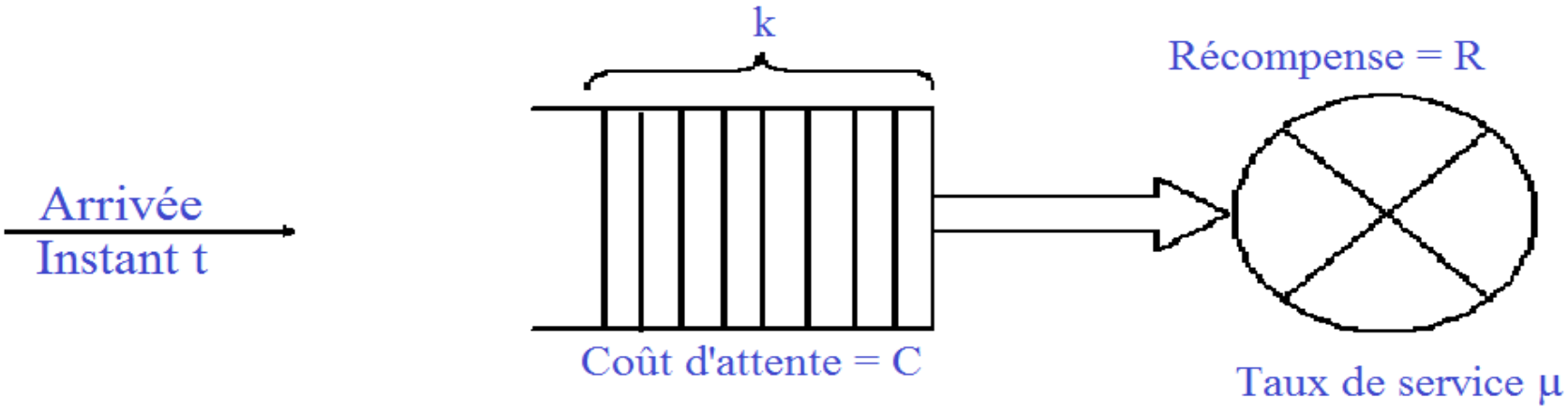
# Introduction



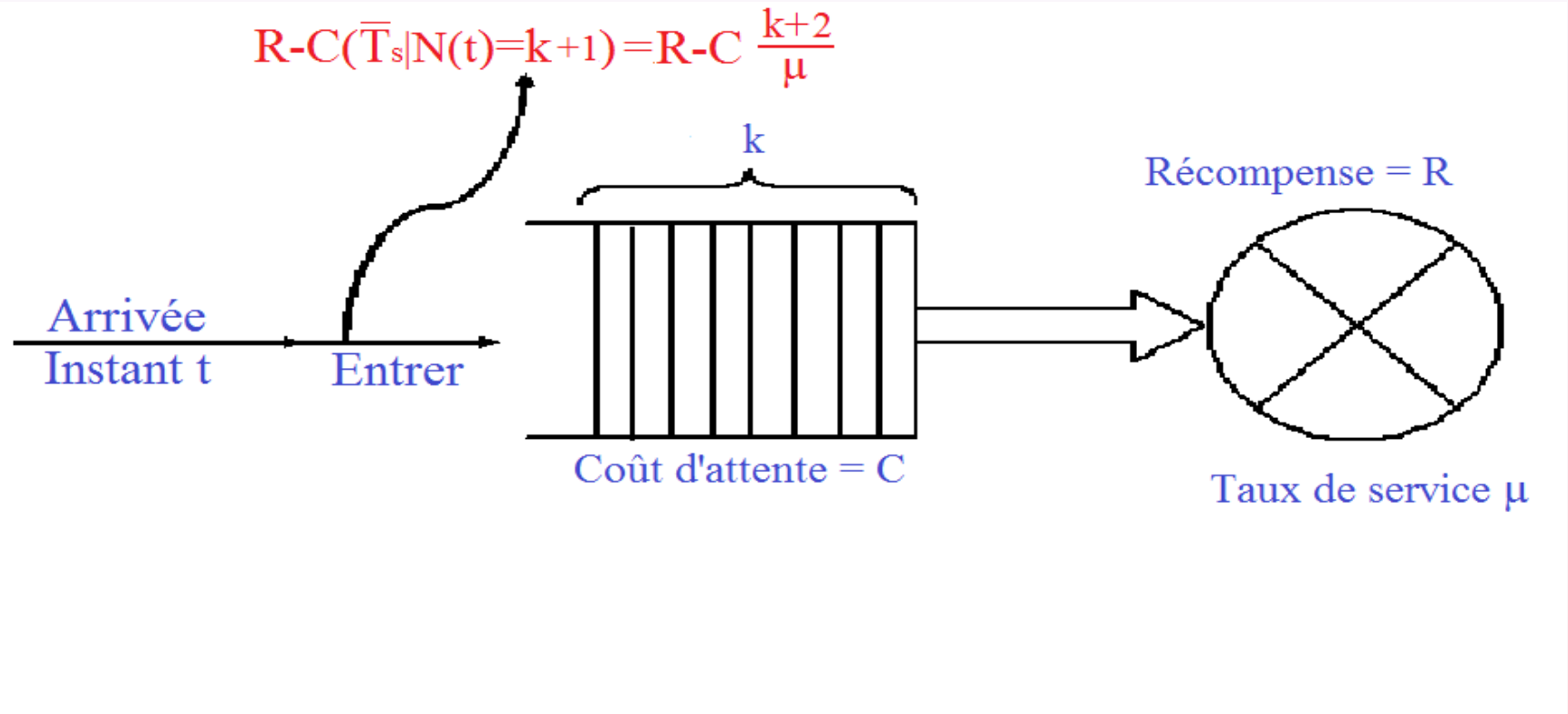
# Introduction



# Introduction



# Introduction



# Introduction

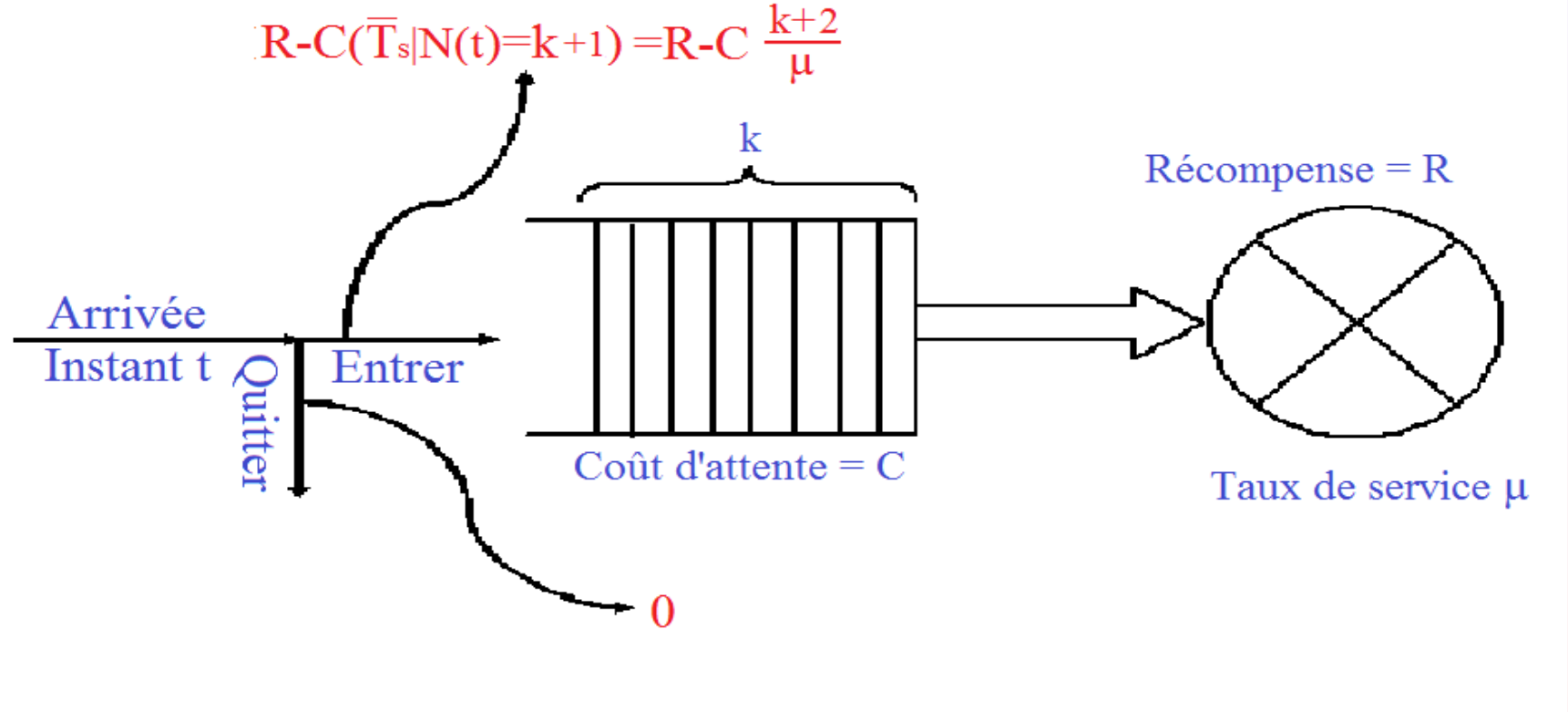



FIGURE 1: Schéma représentatif d'une file d'attente avec structure récompense-coût.

# Etat de l'art

- Naor 1969- Comportement des clients dans un système d'attente $M/M/1$ observable.
- Edelson and Hildebrand 1975- Comportements des clients dans un système d'attente $M/M/1$ non observable.
- Burnetas and Economou 2007- Système $M/M/1$ avec temps d'installation, Boudali and Economou 2011- Système $M/M/1$ avec pannes, systèmes avec vacances- Yang et al. 2015, Li et al. 2016, etc.
- Hassin and Haviv 1997- Système avec clients prioritaires, Hu et al. 2015- Système avec clients hétérogènes, Hassin 2007, Guo et al. 2011- Système avec information partielles, etc.

# Etat de l'art

- Naor 1969- Comportement des clients dans un système d'attente $M/M/1$ observable.
- Edelson and Hildebrand 1975- Comportements des clients dans un système d'attente $M/M/1$ non observable.
- Burnetas and Economou 2007- Système $M/M/1$ avec temps d'installation, Boudali and Economou 2011- Système $M/M/1$ avec pannes, systèmes avec vacances- Yang et al. 2015, Li et al. 2016, etc.
- Hassin and Haviv 1997- Système avec clients prioritaires, Hu et al. 2015- Système avec clients hétérogènes, Hassin 2007, Guo et al. 2011- Système avec information partielles, etc.

- Hassin (1985), Shone et al. (2013)- Comparaison entre les systèmes d'attente, observables et non observables. Simhon et al. (2016)- Transmission stratégique d'information dans un système d'attente.
- Hassin and Haviv (2003)- "To queue or not to queue". Hassin (2016)- "Rational queueing"

- Hassin (1985), Shone et al. (2013)- Comparaison entre les systèmes d'attente, observables et non observables. Simhon et al. (2016)- Transmission stratégique d'information dans un système d'attente.
- Hassin and Haviv (2003)- "To queue or not to queue". Hassin (2016)- "Rational queueing"

- Utilisation des éléments de la théorie des jeux à l'instar de l'équilibre de Nash. Absence de modèles mathématiques décrivant les situations étudiées.

Nos travaux permettront :

- d'analyser les comportements stratégiques des différents agents d'un système d'attente.
- Modèles de jeux- visibilité des situations d'interactions.

- Utilisation des éléments de la théorie des jeux à l'instar de l'équilibre de Nash. Absence de modèles mathématiques décrivant les situations étudiées.

Nos travaux permettront :

- d'analyser les comportements stratégiques des différents agents d'un système d'attente.
- Modèles de jeux- visibilité des situations d'interactions.

1 Introduction

2 Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
- Description du modèle
- Cas observable
- Cas non observable
- Effets de l'information

3 Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
- Description du modèle
- Modélisation sous forme de jeu
- Résolution du jeu
- Illustration

4 Conclusion

# Aperçu

- Systèmes d'attente avec arrivées par groupes (Chaudhry and Templeton 1983, Medhi 1983, Bratiychuk and Chydzinski 2009, etc.)
- Contrôle d'admission (Örmeci and Burnetas 2004, 2005, Çil et al. 2007).
- Analyse des comportements stratégiques.

# Aperçu

- Systèmes d'attente avec arrivées par groupes (Chaudhry and Templeton 1983, Medhi 1983, Bratiychuk and Chydzinski 2009, etc.)
- Contrôle d'admission (Örmeci and Burnetas 2004, 2005, Çil et al. 2007).
- Analyse des comportements stratégiques.

# Aperçu

- Systèmes d'attente avec arrivées par groupes (Chaudhry and Templeton 1983, Medhi 1983, Bratiychuk and Chydzinski 2009, etc.)
- Contrôle d'admission (Örmeci and Burnetas 2004, 2005, Çil et al. 2007).
- Analyse des comportements stratégiques.

# Description du modèle

- Système d'attente $M^2/M/1$ (arrivée par groupe, Poisson ($\lambda$) ; service exponentiel ($\mu$) ; capacité illimitée ; FIFO).
- Structure récompense-coût (récompense $R$, coût $C$).
- $R \geq 3C/2\mu$.
- Le système est décrit par le processus $\{N(t), t \geq 0\}$, où $N(t)$ est l'état du système à l'instant $t$.
- Quelle est la décision à prendre par un client au moment de son arrivée ? entrer ou ne pas entrer ?
- Le gestionnaire du système doit-il choisir de rendre ou pas le système observable ?

# Description du modèle

- Système d'attente $M^2/M/1$ (arrivée par groupe, Poisson ($\lambda$) ; service exponentiel ($\mu$) ; capacité illimitée ; FIFO).
- Structure récompense-coût (récompense $R$, coût $C$).
- $R \geq 3C/2\mu$.
- Le système est décrit par le processus $\{N(t), t \geq 0\}$, où $N(t)$ est l'état du système à l'instant $t$.
- Quelle est la décision à prendre par un client au moment de son arrivée ? entrer ou ne pas entrer ?
- Le gestionnaire du système doit-il choisir de rendre ou pas le système observable ?

# Cas observable

- Accessibilité de l'information sur l'état $N(t)$ du système aux clients, au moment $t$ de leur arrivée.

# Utilités

Soit

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{si le client } i \text{ choisit l'action } E\,; \\ 0, & \text{si le client } i \text{ choisit l'action } NE. \end{cases}$$

La fonction d'utilité d'un client $i$, qui arrive au système avec un autre client $j$, peut être écrite comme suit :

$$U_i(s_i, s_j, n) = (R - C\frac{2n + 1 + s_1 + s_2}{2\mu})s_i,\ \forall i, j \in \{1, 2\}. \quad (1)$$

# Matrices des gains

$$(A_1, A_2) = \begin{array}{c} \\ E \\ NE \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & NE \end{array} \\ \begin{pmatrix} (R - C\frac{2n+3}{2\mu}, R - C\frac{2n+3}{2\mu}) & (R - C\frac{n+1}{\mu}, 0) \\ (0, R - C\frac{n+1}{\mu}) & (0, 0) \end{pmatrix} \end{array}. \quad (2)$$

# La forme extensive du jeu

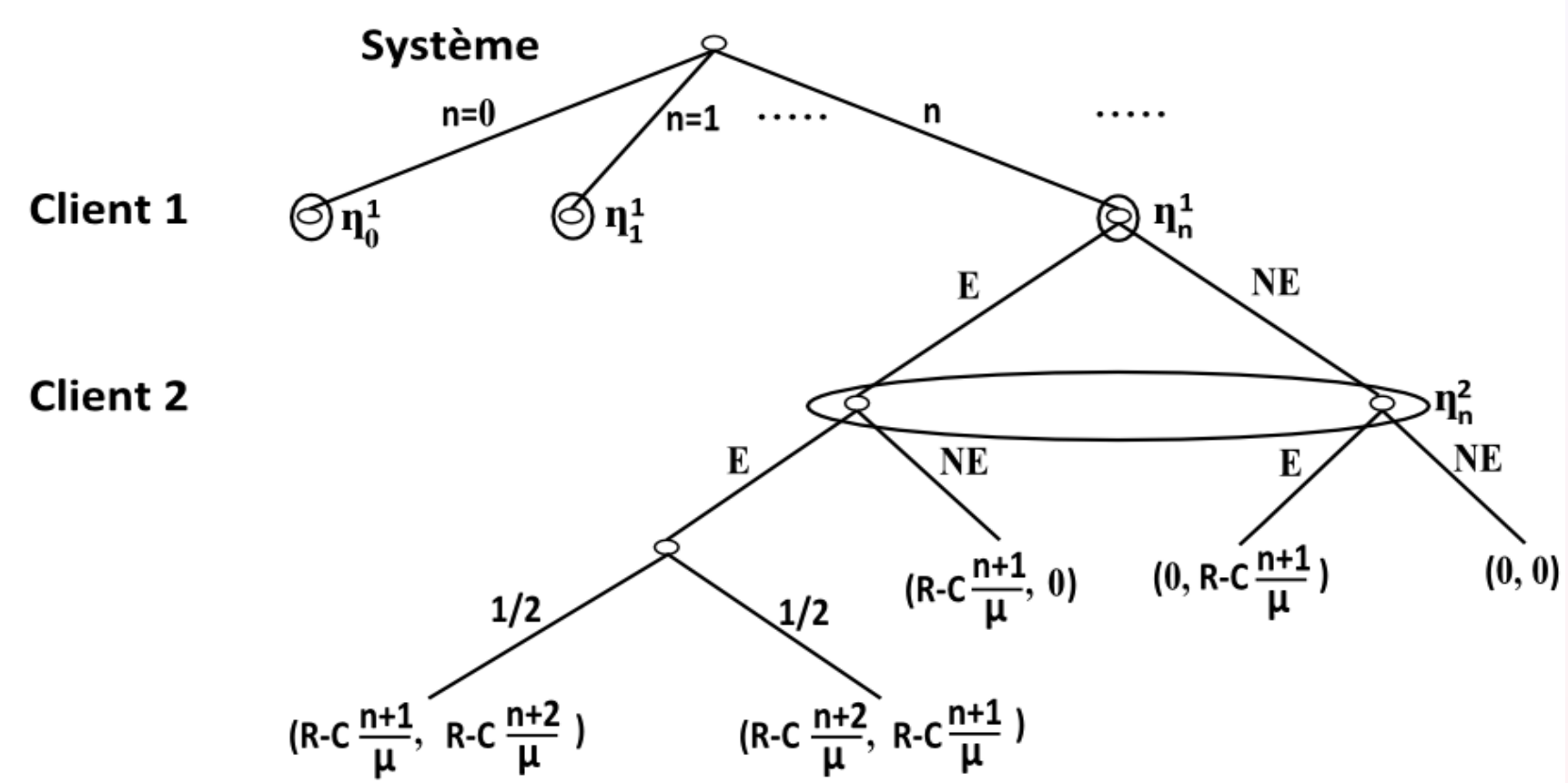



FIGURE 2: La forme extensive du jeu considéré dans le cas observable.

# Notations

- $\eta^1$ (respectivement $\eta^2$) : l'ensemble d'information du joueur 1 (respectivement du joueur 2) ;
- $N^1$ (respectivement $N^2$) : la classe de tous les ensembles d'information du joueur 1 (respectivement du joueur 2) ;
- $S^1_{\eta^1}$ (respectivement $S^2_{\eta^2}$) : l'ensemble d'actions du joueur 1 (respectivement du joueur 2) relatif aux noeuds de décision de l'ensemble d'information $\eta^1$ (respectivement $\eta^2$) ; $S^1_{\eta^1} = S^2_{\eta^2} = \{E, NE\} = S_1 = S_2, \forall \eta^1 \in N^1, \forall \eta^2 \in N^2$.
- $\Delta_2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 / \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0\}$ ;
- $Y_{\eta^1}$ : l'ensemble des distributions de probabilités sur $S^1_{\eta^1}$ ; $Y_{\eta^1} = \Delta_2$ ;
- $Z_{\eta^2}$ : l'ensemble des distributions de probabilités sur $S^2_{\eta^2}$ ; $Z_{\eta^2} = \Delta_2$ ;
- $Y = \bigcup_{\eta^1 \in N^1} Y_{\eta^1}, \quad Z = \bigcup_{\eta^2 \in N^2} Z_{\eta^2}$.

**Définition 1**

*Une stratégie de comportement du joueur $i$ est une application $\hat{\gamma}^i(.) : N^i \to Y_i$ assignant à chaque ensemble d'information $\eta^i \in N^i$ un élément de $Y_{\eta^i}$, ie $\hat{\gamma}^i(\eta^i) \in Y_{\eta^i}, \forall \eta^i \in N^i$.*

- L'ensemble des stratégies de comportement du joueur $i$, $i \in \{1, 2\}$, est noté $\hat{\Gamma}^i$.

On notera par

$$J =< I = \{1, 2\}, \{\hat{\Gamma}^1, \hat{\Gamma}^2\}, \widehat{U}_i >, \tag{3}$$

la forme normale du jeu, où pour $(\hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2) \in \hat{\Gamma}^1 \times \hat{\Gamma}^2$ :

$$\widehat{U}_1(\hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2, n) = \alpha^t A_1 \beta,$$

et

$$\widehat{U}_2(\hat{\gamma}^1, \hat{\gamma}^2, n) = \alpha^t A_2 \beta,$$

si $\hat{\gamma}^1(\eta^1) = \alpha \in \Delta_2, \hat{\gamma}^2(\eta^2) = \beta \in \Delta_2, \eta^1 = \eta^1_n$ et $\eta^2 = \eta^2_n$.

## Définition 2

*Une paire de stratégies* $(\hat{\gamma}^{1*}, \hat{\gamma}^{2*}) \in \hat{\Gamma}^1 \times \hat{\Gamma}^2$ *est un équilibre de Nash dans l'espace des stratégies de comportement du jeu (3), si elles vérifient les inégalités suivantes :*

$$\hat{U}_1(\hat{\gamma}^{1*}, \hat{\gamma}^{2*}, n) \geq \hat{U}_1(\hat{\gamma}^{1}, \hat{\gamma}^{2*}, n), \quad \forall \hat{\gamma}^1 \in \hat{\Gamma}^1, \tag{4}$$

$$\hat{U}_2(\hat{\gamma}^{1*}, \hat{\gamma}^{2*}, n) \geq \hat{U}_2(\hat{\gamma}^{1*}, \hat{\gamma}^{2}, n), \quad \forall \hat{\gamma}^2 \in \hat{\Gamma}^2. \tag{5}$$

# Résolution du jeu

## Théorème 1 (Ziani et al. 2015)

*Dans la file d'attente d'attente* $M^2/M/1$, *il existe un seuil* $n_e = \lfloor \frac{R\mu}{C} - \frac{3}{2} \rfloor$, *pour lequel le jeu (3) admet trois équilibres de Nash dans l'espace* $\hat{\Gamma}^1 \times \hat{\Gamma}^2$ *des stratégies de comportement :* $(\hat{\gamma}_1^{1*}(\eta^1), \hat{\gamma}_1^{2*}(\eta^2)) \in \hat{\Gamma}^1 \times \hat{\Gamma}^2$ *définis par :*

$$\hat{\gamma}_1^{1*}(\eta^1) = \begin{cases} E & si\ (\eta^1 = \eta_k^1, 0 \leq k \leq n_e)\ ou\ (\eta^1 = \eta_k^1, k = n_e + 1, \{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2})\ ; \\ NE & sinon. \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_1^{2*}(\eta^2) = \begin{cases} E & si\ \eta^2 = \eta_k^2, 0 \leq k \leq n_e\ ; \\ NE & sinon. \end{cases} \tag{6}$$

$(\hat{\gamma}_2^{1*}(\eta^1), \hat{\gamma}_2^{2*}(\eta^2)) \in \hat{\Gamma}^1 \times \hat{\Gamma}^2$ défini par :

$$\hat{\gamma}_2^{1*}(\eta^1) = \begin{cases} E & \text{si } \eta^1 = \eta_k^1, 0 \leq k \leq n_e\,; \\ NE & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_2^{2*}(\eta^2) = \begin{cases} E & \text{si } (\eta^2 = \eta_k^2, 0 \leq k \leq n_e) \text{ ou } (\eta^2 = \eta_k^2, k = n_e + 1 \text{ et } \{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2})\,; \\ NE & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

$(\hat{\gamma}_3^{1*}(\eta^1), \hat{\gamma}_3^{2*}(\eta^2)) \in \hat{\Gamma^1} \times \hat{\Gamma^2}$ défini par :

$$\hat{\gamma}_3^{1*}(\eta^1) = \begin{cases} \text{E si } \eta^1 = \eta_k^1, 0 \leq k \leq n_e; \\ \begin{cases} \text{E avec p} = p_e = \frac{2R\mu - C(2n_e+4)}{C} \\ \text{NE avec } 1 - p_e \end{cases} & \text{si } \eta^1 = \eta_k^1, k = n_e + 1 \text{ et } \{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2}; \\ \text{NE sinon.} \end{cases}$$

$$\hat{\gamma}_3^{2*}(\eta^2) = \begin{cases} \text{E si } \eta^2 = \eta_k^2, 0 \leq k \leq n_e; \\ \begin{cases} \text{E avec q} = p_e = \frac{2R\mu - C(2n_e+4)}{C} \\ \text{NE avec } 1 - p_e \end{cases} & \text{si } \eta^2 = \eta_k^2, k = n_e + 1 \text{ et } \{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2}; \\ \text{NE sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

où $p$ (respectivement $q$) est la probabilité que le client 1 (respectivement le client 2) joue la stratégie $E$.

Les gains associés à chacune des issues d'équilibre sont définis par les relations suivantes :

$$\widehat{U}_1(\hat{\gamma}_1^{1*}, \hat{\gamma}_1^{2*}, n) = \begin{cases} R - C\frac{2n+3}{2\mu} & \text{si } 0 \leq n \leq n_e; \\ R - C\frac{n_e+2}{\mu} & \text{si } n = n_e + 1 \text{ et } \{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{9}$$

$$\widehat{U}_2(\hat{\gamma}_1^{1*}, \hat{\gamma}_1^{2*}, n) = \begin{cases} R - C\frac{2n+3}{2\mu} & \text{si } 0 \leq n \leq n_e; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

$$\widehat{U}_1(\hat{\gamma}_2^{1*}, \hat{\gamma}_2^{2*}, n) = \begin{cases} R - C\frac{2n+3}{2\mu} & \text{si } 0 \leq n \leq n_e; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}$$

$$\widehat{U}_2(\hat{\gamma}_2^{1*}, \hat{\gamma}_2^{2*}, n) = \begin{cases} R - C\frac{2n+3}{2\mu} & \text{si } 0 \leq n \leq n_e; \\ R - C\frac{n_e+2}{\mu} & \text{si } n = n_e + 1 \text{ et } \{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12}$$

$$\widehat{U}_1(\hat{\gamma}_3^{1*}, \hat{\gamma}_3^{2*}, n) = \widehat{U}_2(\hat{\gamma}_3^{1*}, \hat{\gamma}_3^{2*}, n) = \begin{cases} R - C\frac{2n+3}{2\mu} & \text{si } 0 \leq n \leq n_e; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{13}$$

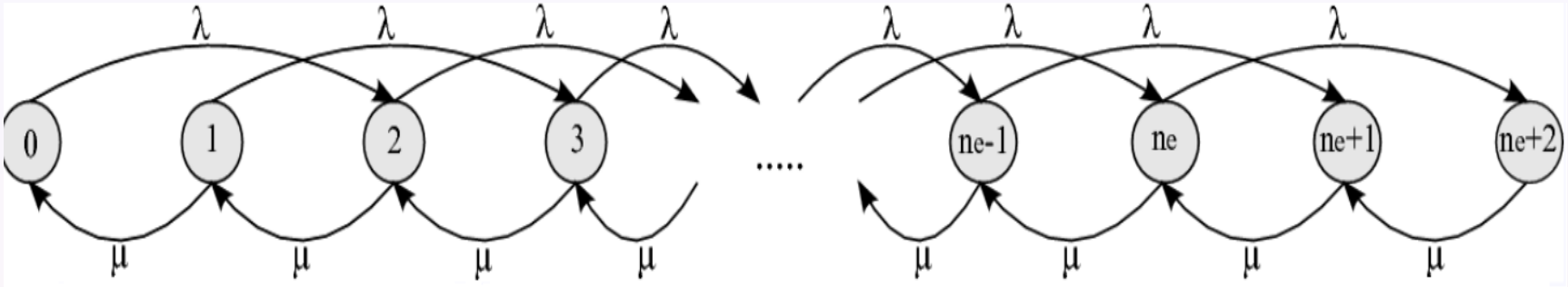



FIGURE 3: Le diagramme de transition dans le cas observable lorsque $\{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}$.

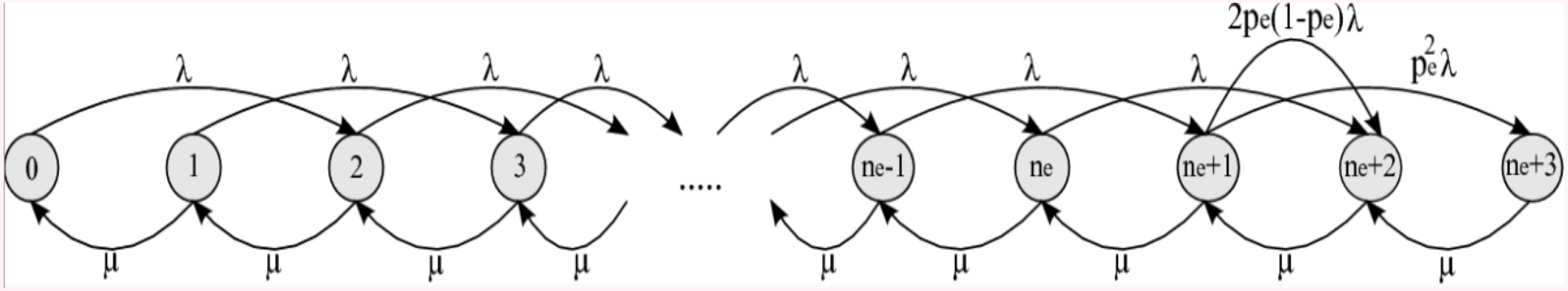



FIGURE 4: Le diagramme de transition dans le cas observable lorsque $\{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2}$.

## Proposition 1 (Ziani et al. 2015)

*Dans la file d'attente $M^2/M/1$ observable, où les clients suivent l'équilibre symétrique donné par (8), la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système est donnée comme suit :*

***Cas 1.*** $\{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}$.

***a.*** *Si* $n_e = 0$, *alors :*

$$P_0 = \frac{1}{1+2\frac{\lambda}{\mu}},\ P_1 = P_2 = \frac{\lambda}{\mu}P_0.$$

***b.*** *Si* $n_e \neq 0$, *alors :*

$$P_0 = \frac{\frac{\mu}{2\lambda}}{1 + \frac{\mu}{2\lambda} + \sum_{n=2}^{n_e}\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} C^i_{n-i-2}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1} + \frac{\lambda}{\mu}(1 + \sum_{n=2}^{n_e}\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor -1} C^i_{n-i-1}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1})}, \quad (14)$$

$$P_1 = \frac{1}{2(1 + \frac{\mu}{2\lambda} + \sum_{n=2}^{n_e}\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} C^i_{n-i-2}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1} + \frac{\lambda}{\mu}(1 + \sum_{n=2}^{n_e}\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor -1} C^i_{n-i-1}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1}))}, \quad (15)$$

$$P_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} C_{n-i-2}^{i} (\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1} P_0 + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} C_{n-i-1}^{i} (\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1} P_1, n = \overline{2, n_e + 1}, \quad (16)$$

$$P_{n_e+2} = 1 - \frac{\mu(1 - P_0)}{2\lambda} - P_{n_e+1}. \quad (17)$$

**Cas 2.** $\{\frac{\mu R}{C}\} < \frac{1}{2}$.
**a.** Si $n_e = 0$, alors :

$$P_0 = \frac{\frac{\mu}{2\lambda}}{1 + \frac{\mu}{2\lambda} + p_e \frac{\lambda}{\mu}}, P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, P_2 = ((2p_e - p_e^2)\frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu})P_0, P_3 = \frac{p_e^2 \lambda^2}{\mu^2} P_0.$$

**b.** Si $n_e \neq 0$, alors :

$$P_0 = \frac{\frac{\mu}{2\lambda}}{1 + \frac{\mu}{2\lambda} + \sum_{n=2}^{n_e+1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} C_{n-i-2}^{i} (\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1} + (p_e - 1) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_e+1}{2} \rfloor - 1} C_{n_e-i-1}^{i} (\frac{\lambda}{\mu})^{n_e-i} + a}, \quad (18)$$

avec $a = \frac{\lambda}{\mu}(1 + \sum_{n=2}^{n_e+1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} C_{n-i-1}^{i} (\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1} + (p_e - 1) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_e+2}{2} \rfloor - 1} C_{n_e-i}^{i} (\frac{\lambda}{\mu})^{n_e-i})$.

$$P_1 = \frac{1}{2(1+\frac{\mu}{2\lambda}+\sum_{n=2}^{n_e+1}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1} C_{n-i-2}^{i}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1}+(p_e-1)\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n_e+1}{2}\rfloor-1} C_{n_e-i-1}^{i}(\frac{\lambda}{\mu})^{n_e-i}+b)}, \quad (19)$$

avec $b = \frac{\lambda}{\mu}(1+\sum_{n=2}^{n_e+1}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-1} C_{n-i-1}^{i}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1}+(p_e-1)\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n_e+2}{2}\rfloor-1} C_{n_e-i}^{i}(\frac{\lambda}{\mu})^{n_e-i})$.

$$P_n = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1} C_{n-i-2}^{i}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1}P_0 + \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-1} C_{n-i-1}^{i}(\frac{\lambda}{\mu})^{n-i-1}P_1, n=\overline{2, n_e+1}, \quad (20)$$

$$P_{n_e+2} = \frac{(p_e(2-p_e)\lambda+\mu)P_{n_e+1}-\lambda P_{n_e-1}}{\mu}, \quad (21)$$

$$P_{n_e+3} = \frac{p_e^2\lambda}{\mu}P_{n_e+1}. \quad (22)$$

## Probabilité de perte :

$$P_p = \begin{cases} P_{n_e+1} + P_{n_e+2}, & \text{si } \{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}, \\ (1-p_e)P_{n_e+1} + P_{n_e+2} + P_{n_e+3}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

## Le taux d'entrée :

$$\lambda_e^{obs} = \begin{cases} 2\lambda(1 - P_{n_e+1} - P_{n_e+2}), & \text{si } \{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}, \\ 2\lambda(1 - (1-p_e)P_{n_e+1} - P_{n_e+2} - P_{n_e+3}), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (24)$$

## Bénéfice social :

$$U_s^{obs} = \begin{cases} 2R\lambda(1 - P_{n_e+1} - P_{n_e+2}) - C\sum_{n=0}^{n_e+2} nP_n, & \text{si } \{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}, \\ 2R\lambda(1 - (1-p_e)P_{n_e+1} - P_{n_e+2} - P_{n_e+3}) - C\sum_{n=0}^{n_e+3} nP_n, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (25)$$

## Probabilité de perte :

$$P_p = \begin{cases} P_{n_e+1} + P_{n_e+2}, & \text{si } \{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}, \\ (1-p_e)P_{n_e+1} + P_{n_e+2} + P_{n_e+3}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (23)$$

## Le taux d'entrée :

$$\lambda_e^{obs} = \begin{cases} 2\lambda(1 - P_{n_e+1} - P_{n_e+2}), & \text{si } \{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}, \\ 2\lambda(1 - (1-p_e)P_{n_e+1} - P_{n_e+2} - P_{n_e+3}), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (24)$$

## Bénéfice social :

$$U_s^{obs} = \begin{cases} 2R\lambda(1 - P_{n_e+1} - P_{n_e+2}) - C\sum_{n=0}^{n_e+2} nP_n, & \text{si } \{\frac{\mu R}{C}\} \geq \frac{1}{2}, \\ 2R\lambda(1 - (1-p_e)P_{n_e+1} - P_{n_e+2} - P_{n_e+3}) - C\sum_{n=0}^{n_e+3} nP_n, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (25)$$

# Cas non observable

- Absence d'information sur l'état du système.
- Tous les clients sont au même niveau d'information.
- Probabilité d'entrée au système=p.

# Les caractéristiques du système

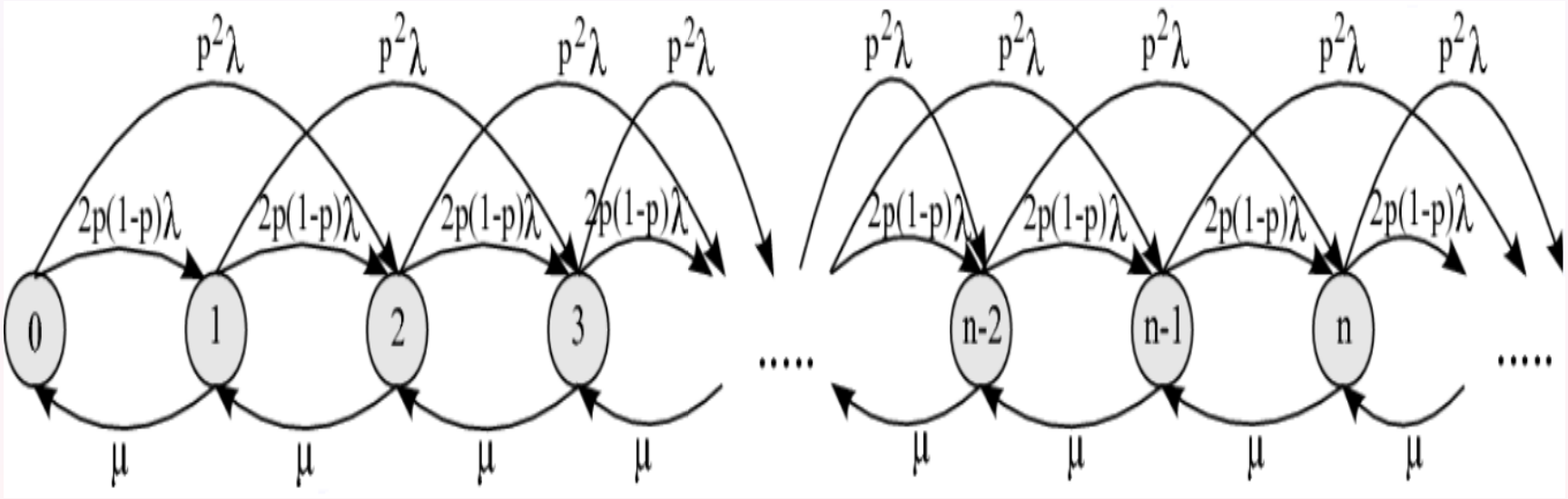



FIGURE 5: Le diagramme de transition dans le cas non observable.

- Système d'attente $M^X/M/1$, où X est une variable aléatoire de loi binomiale (2, p).
- On obtient :

$$P_0 = 1 - \frac{2\lambda p}{\mu}, \tag{26}$$

$$P_1 = \frac{\lambda p(2-p)}{\mu} P_0, \tag{27}$$

$$P_2 = (p(2-p)\frac{\lambda}{\mu} + 1)P_1 - 2p(1-p)\frac{\lambda}{\mu}P_0, \tag{28}$$

$$P_n = (p(2-p)\frac{\lambda}{\mu} + 1)P_{n-1} - 2\frac{\lambda}{\mu}p(1-p)P_{n-2} - \frac{\lambda}{\mu}p^2 P_{n-3}, \forall n \geq 3. \tag{29}$$

$$\overline{N} = \frac{p\lambda(p+2)}{\mu - 2p\lambda}, \tag{30}$$

$$\overline{T}_s = \frac{p+2}{2(\mu - 2p\lambda)}. \tag{31}$$

- Système d'attente $M^X/M/1$, où X est une variable aléatoire de loi binomiale (2, p).
- On obtient :

$$P_0 = 1 - \frac{2\lambda p}{\mu}, \tag{26}$$

$$P_1 = \frac{\lambda p(2-p)}{\mu} P_0, \tag{27}$$

$$P_2 = (p(2-p)\frac{\lambda}{\mu} + 1)P_1 - 2p(1-p)\frac{\lambda}{\mu}P_0, \tag{28}$$

$$P_n = (p(2-p)\frac{\lambda}{\mu} + 1)P_{n-1} - 2\frac{\lambda}{\mu}p(1-p)P_{n-2} - \frac{\lambda}{\mu}p^2 P_{n-3}, \forall n \geq 3. \tag{29}$$

$$\overline{N} = \frac{p\lambda(p+2)}{\mu - 2p\lambda}, \tag{30}$$

$$\overline{T}_s = \frac{p+2}{2(\mu - 2p\lambda)}. \tag{31}$$

- Système d'attente $M^X/M/1$, où X est une variable aléatoire de loi binomiale (2, p).
- On obtient :

$$P_0 = 1 - \frac{2\lambda p}{\mu}, \tag{26}$$

$$P_1 = \frac{\lambda p(2-p)}{\mu} P_0, \tag{27}$$

$$P_2 = (p(2-p)\frac{\lambda}{\mu} + 1)P_1 - 2p(1-p)\frac{\lambda}{\mu}P_0, \tag{28}$$

$$P_n = (p(2-p)\frac{\lambda}{\mu} + 1)P_{n-1} - 2\frac{\lambda}{\mu}p(1-p)P_{n-2} - \frac{\lambda}{\mu}p^2 P_{n-3}, \forall n \geq 3. \tag{29}$$

$$\overline{N} = \frac{p\lambda(p+2)}{\mu - 2p\lambda}, \tag{30}$$

$$\overline{T}_s = \frac{p+2}{2(\mu - 2p\lambda)}. \tag{31}$$

# Modélisation sous forme de jeu

- utilisation d'une stratégie mixte $\alpha = (p, 1-p) \in \Delta_2$ par les deux clients d'un groupe.
- Soient $\alpha_1 = (p_1, 1-p_2)$ et $\alpha_2 = (p_2, 1-p_2)$ les stratégies mixtes des deux clients d'un groupe ($p_1 = p_2 = p$).

Alors,

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [p_1(U_1(E, E, n)p_2 + U_1(E, NE, n)(1-p_2))$$

$$+(1-p_1)(U_1(NE, E, n)p_2 + U_1(NE, NE, n)(1-p_2))]P_n. \quad (32)$$

D'où,

$$U_i(\alpha_i, \alpha_j, \alpha) = p_i(R - C\frac{\overline{N} + 1 + \frac{1}{2}p_j}{\mu}) = p_i(R - C\frac{\frac{p\lambda(p+2)}{\mu - 2p\lambda} + 1 + \frac{1}{2}p_j}{\mu}) \quad (33)$$

et

$$U_i(\alpha, \alpha, \alpha) = p(R - C\overline{T_s}) = p(R - C\frac{p+2}{2(\mu - 2p\lambda)}), \forall i, j \in \{1, 2\}. \quad (34)$$

# Modélisation sous forme de jeu

- utilisation d'une stratégie mixte $\alpha = (p, 1-p) \in \Delta_2$ par les deux clients d'un groupe.
- Soient $\alpha_1 = (p_1, 1-p_2)$ et $\alpha_2 = (p_2, 1-p_2)$ les stratégies mixtes des deux clients d'un groupe ($p_1 = p_2 = p$).

Alors,

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} [p_1(U_1(E,E,n)p_2 + U_1(E,NE,n)(1-p_2))$$

$$+(1-p_1)(U_1(NE,E,n)p_2 + U_1(NE,NE,n)(1-p_2))]P_n. \quad (32)$$

D'où,

$$U_i(\alpha_i, \alpha_j, \alpha) = p_i(R - C\frac{\overline{N} + 1 + \frac{1}{2}p_j}{\mu}) = p_i(R - C\frac{\frac{p\lambda(p+2)}{\mu - 2p\lambda} + 1 + \frac{1}{2}p_j}{\mu}) \quad (33)$$

et

$$U_i(\alpha, \alpha, \alpha) = p(R - C\overline{T_s}) = p(R - C\frac{p+2}{2(\mu - 2p\lambda)}), \forall i, j \in \{1, 2\}. \quad (34)$$

# Modélisation sous forme de jeu

- Jeu à somme non nulle à information complète et imparfaite.

$$J(t) =< I, \{S_i\}_{i \in I}, \{U_i\}_{i \in \{1,2\}} >, \tag{35}$$

où $I$ est l'ensemble des joueurs, constitué des deux clients et la nature (système),
$S_1 = S_2 = S = \{E, NE\}$- l'ensemble des stratégies pures des deux clients,
$S_3 = \mathbb{N}$- l'ensemble des états de la nature.

# La forme extensive du jeu

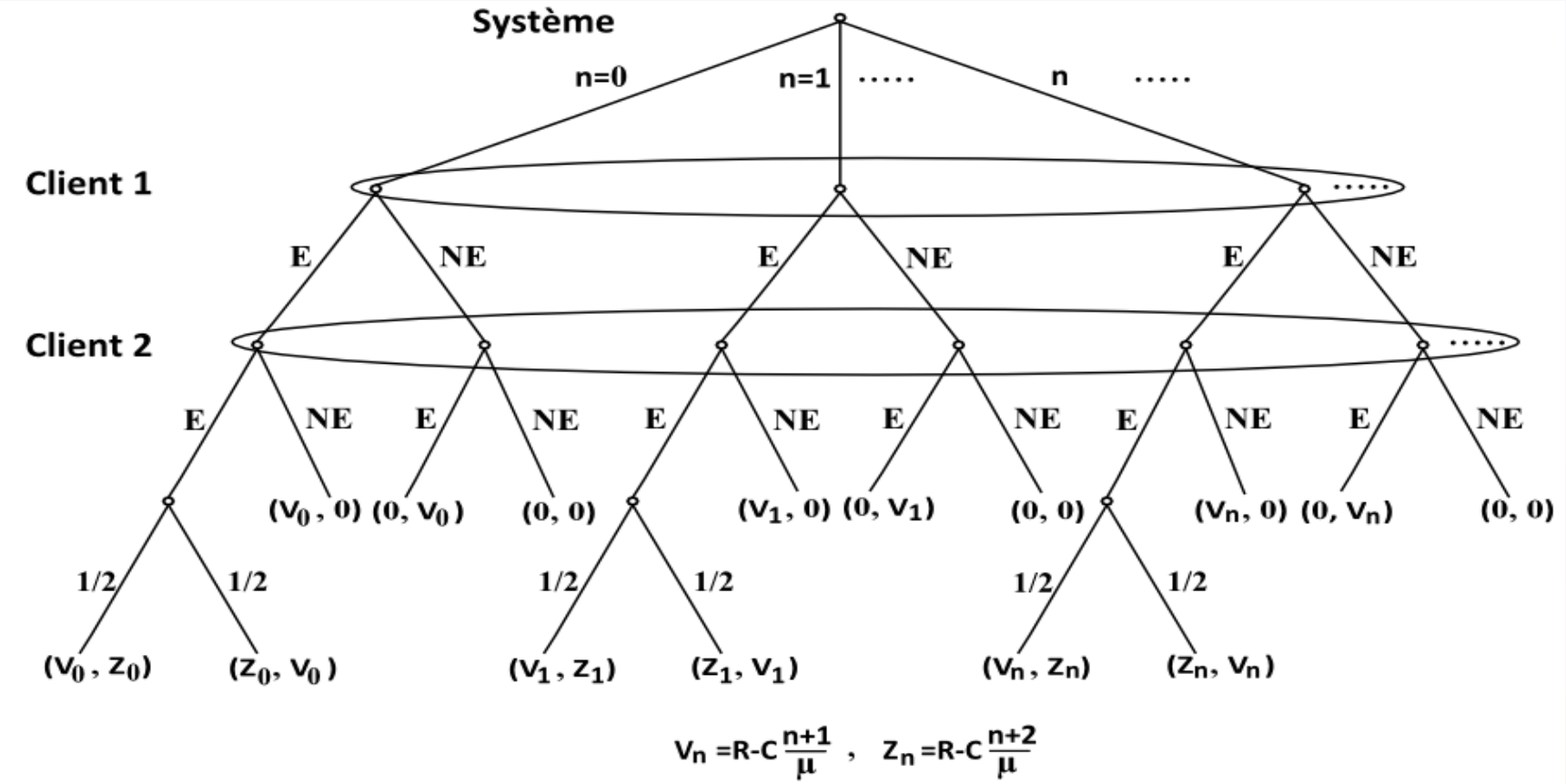



FIGURE 6: La forme extensive du jeu associé au cas non observable.

## Théorème 2 (Ziani et al. 2015)

*Dans la file d'attente $M^2/M/1$ non observable, il existe une probabilité $p_e^* = \frac{2R\mu - 2C}{4R\lambda + C}$, telle que la paire de stratégies mixtes $(\alpha^*, \alpha^*) \in [0,1]^2 \times [0,1]^2$ forme un équilibre de Nash pour le jeu (35), où :*

$$\alpha^* = \begin{cases} (1,0), & si\ 4\lambda \leq 2\mu - \frac{3C}{R}\ ; \\ (p_e^*, 1 - p_e^*), & si\ 0 \leq 2\mu - \frac{3C}{R} \leq 4\lambda. \end{cases}$$

*Les utilités à l'équilibre sont données comme suit :*

$$U(\alpha^*, \alpha^*, \alpha^*) = \begin{cases} R - C\frac{3}{2\mu - 4\lambda}, & si\ 4\lambda \leq 2\mu - \frac{3C}{R}\ ; \\ 0, & si\ 0 \leq 2\mu - \frac{3C}{R} \leq 4\lambda. \end{cases} \quad (36)$$

Le taux d'entrée s'écrit sous la forme :

$$\lambda_e^{nobs} = \begin{cases} 2\lambda, & \text{si } 4\lambda \leq 2\mu - \frac{3C}{R}\ ; \\ 2p_e^*\lambda, & \text{si } 0 \leq 2\mu - \frac{3C}{R} \leq 4\lambda. \end{cases} \tag{37}$$

Le bénéfice social par unité de temps est :

$$U_s^{nobs} = \begin{cases} 2\lambda(R - C\frac{3}{2\mu-4\lambda}), & \text{si } 4\lambda \leq 2\mu - \frac{3C}{R}\ ; \\ 2p_e^*\lambda(R - C\frac{p_e^*+2}{2\mu-4p_e^*\lambda}) = 0, & \text{si } 0 \leq 2\mu - \frac{3C}{R} \leq 4\lambda. \end{cases} \tag{38}$$

# Effets de l'information

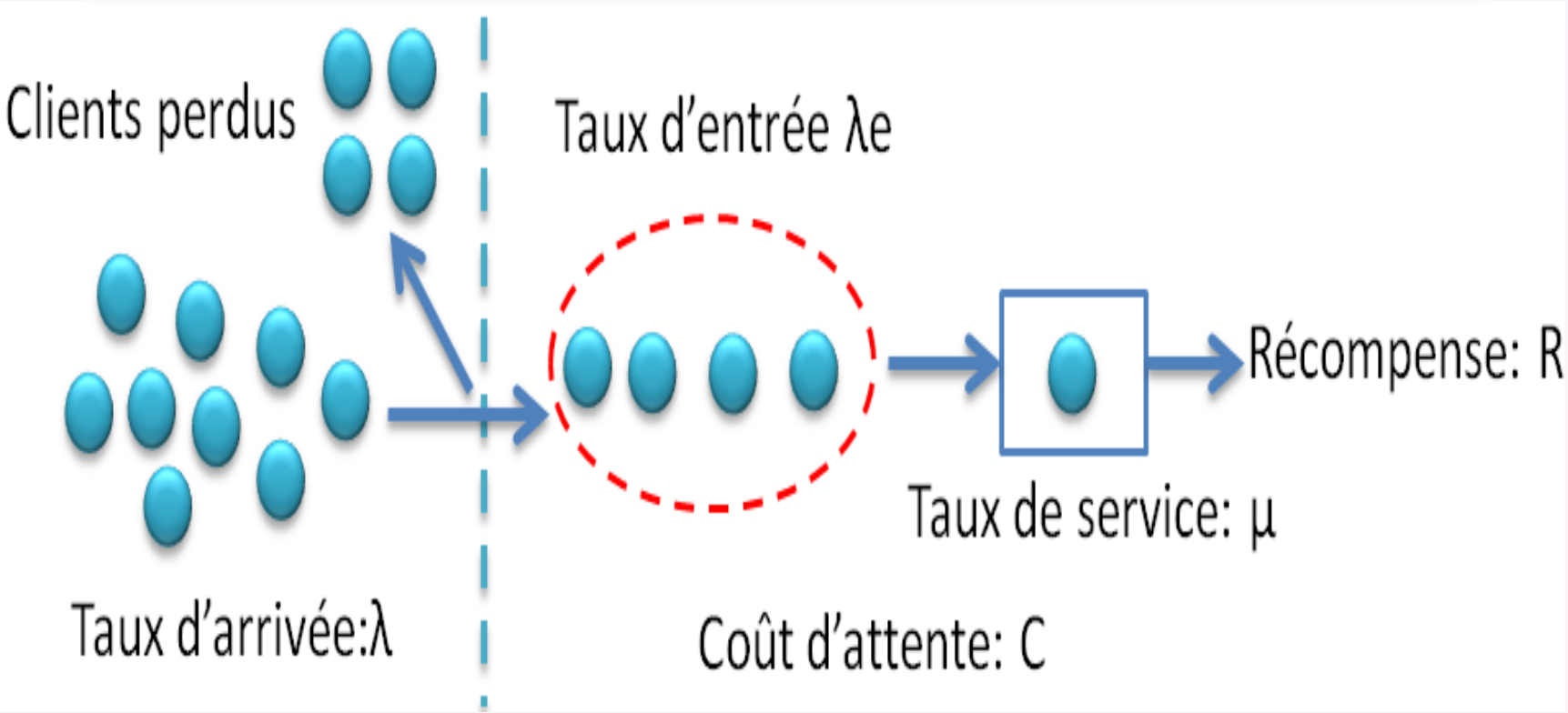



FIGURE 7: Diagramme représentatif du système.

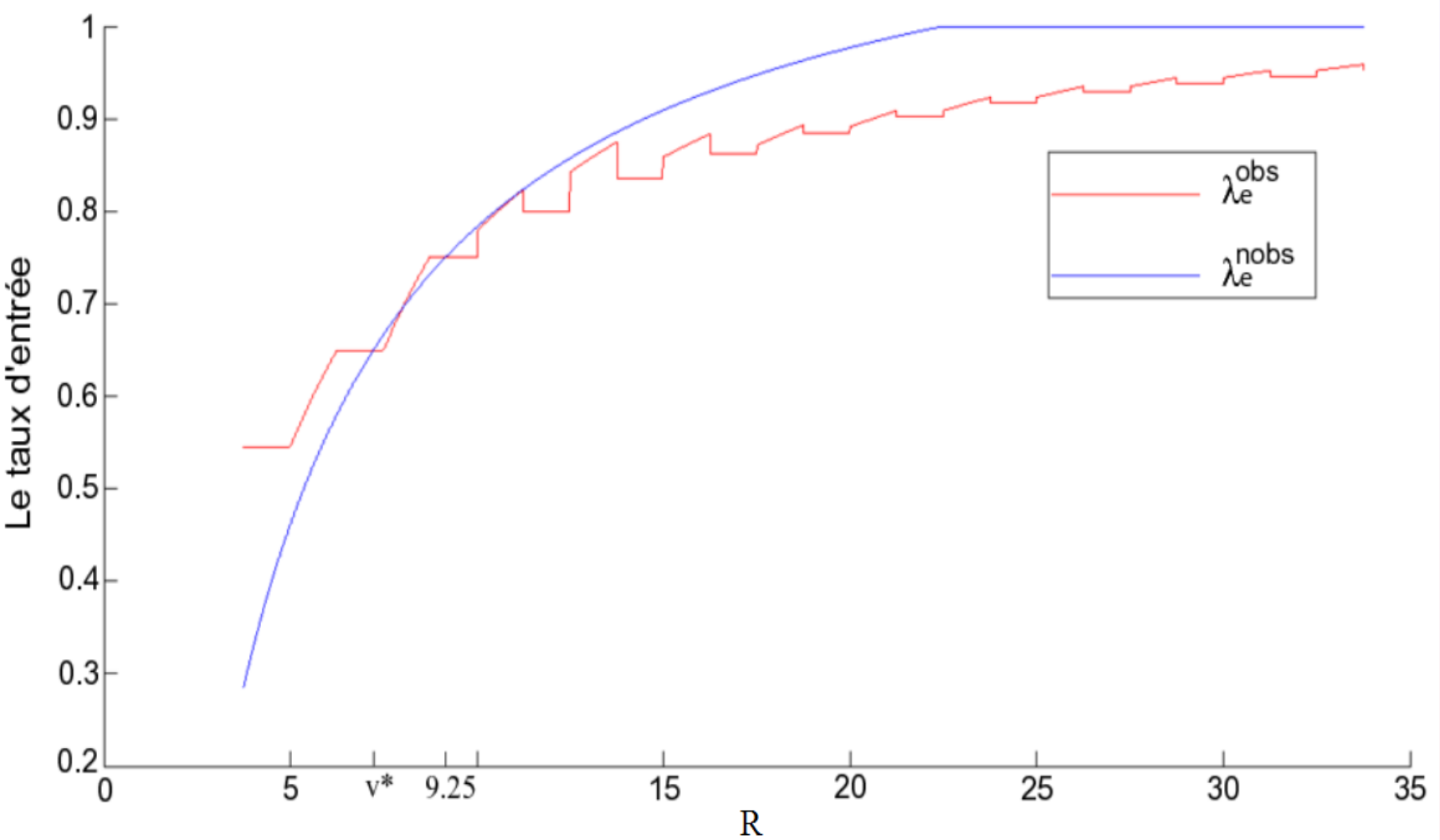



FIGURE 8: Le taux d'entrée en fonction de $R$.

1 Introduction

2 Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
- Description du modèle
- Cas observable
- Cas non observable
- Effets de l'information

3 Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
- Description du modèle
- Modélisation sous forme de jeu
- Résolution du jeu
- Illustration

4 Conclusion

# Aperçu

- Analyse des performances du système d'attente $M/M/1$.
- Comportements des clients (Naor 1969, Edelson and Hildebrand 1975, Hassin 2007).
- Comportements stratégiques des différents agents intervenant dans le système.

# Aperçu

- Analyse des performances du système d'attente $M/M/1$.
- Comportements des clients (Naor 1969, Edelson and Hildebrand 1975, Hassin 2007).
- Comportements stratégiques des différents agents intervenant dans le système.

# Aperçu

- Analyse des performances du système d'attente $M/M/1$.
- Comportements des clients (Naor 1969, Edelson and Hildebrand 1975, Hassin 2007).
- Comportements stratégiques des différents agents intervenant dans le système.

# Description du modèle

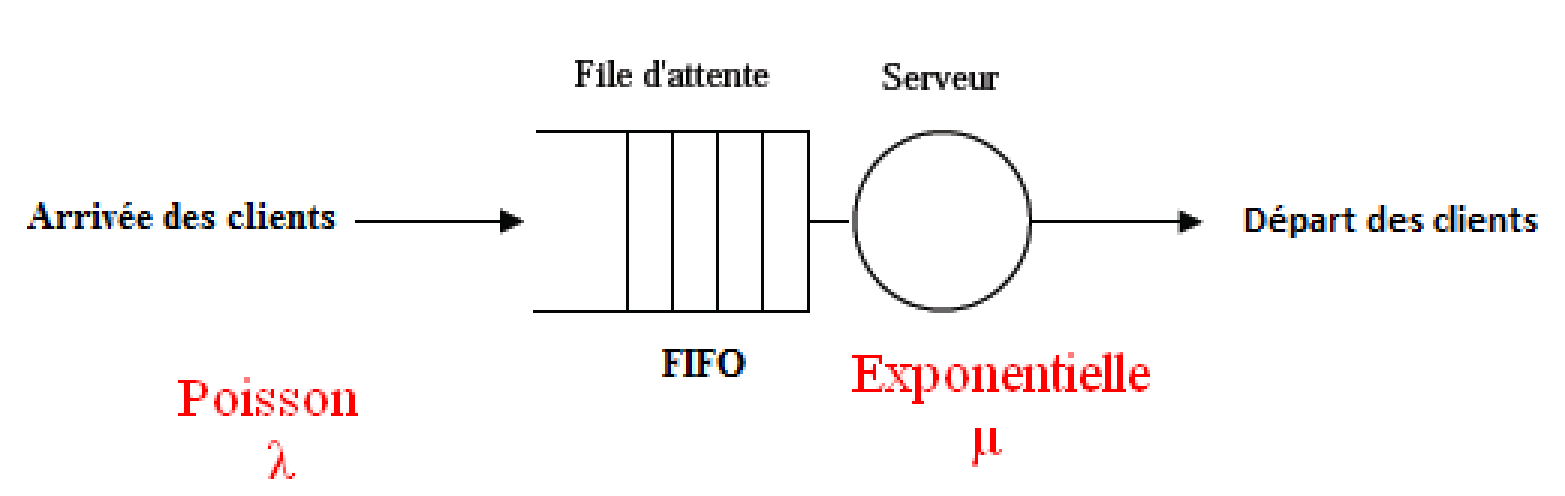



FIGURE 9: Système d'attente $M/M/1$

# Description du modèle

- Structure récompense-coût (récompense de service=R, coût d'attente=C).
- Coût d'entrée au système ou prix de service $R_s \rightarrow$ Revenu du serveur/client.
- Coût de service $\rightarrow c(\mu) = a\mu + b, a > 0, b \geq 0$.
- Clients : entrer ou ne pas entrer.
- Fournisseur de service $\rightarrow$ Choix d'un taux de service.
- Optimiseur social $\rightarrow$ Type d'information à mettre à la disposition des clients (rendre le système observable ou non observable).

# Description du modèle

- Structure récompense-coût (récompense de service=R, coût d'attente=C).
- Coût d'entrée au système ou prix de service $R_s \rightarrow$ Revenu du serveur/client.
- Coût de service $\rightarrow c(\mu) = a\mu + b, a > 0, b \geq 0$.
- Clients : entrer ou ne pas entrer.
- Fournisseur de service $\rightarrow$ Choix d'un taux de service.
- Optimiseur social $\rightarrow$ Type d'information à mettre à la disposition des clients (rendre le système observable ou non observable).

# Description du modèle

- Structure récompense-coût (récompense de service=R, coût d'attente=C).
- Coût d'entrée au système ou prix de service $R_s \rightarrow$ Revenu du serveur/client.
- Coût de service $\rightarrow c(\mu) = a\mu + b, a > 0, b \geq 0$.
- Clients : entrer ou ne pas entrer.
- Fournisseur de service $\rightarrow$ Choix d'un taux de service.
- Optimiseur social $\rightarrow$ Type d'information à mettre à la disposition des clients (rendre le système observable ou non observable).

# Description du modèle

- Structure récompense-coût (récompense de service=R, coût d'attente=C).
- Coût d'entrée au système ou prix de service $R_s \rightarrow$ Revenu du serveur/client.
- Coût de service $\rightarrow c(\mu) = a\mu + b, a > 0, b \geq 0$.
- Clients : entrer ou ne pas entrer.
- Fournisseur de service $\rightarrow$ Choix d'un taux de service.
- Optimiseur social $\rightarrow$ Type d'information à mettre à la disposition des clients (rendre le système observable ou non observable).

# Description du modèle

- Structure récompense-coût (récompense de service=R, coût d'attente=C).
- Coût d'entrée au système ou prix de service $R_s \rightarrow$ Revenu du serveur/client.
- Coût de service $\rightarrow c(\mu) = a\mu + b, a > 0, b \geq 0$.
- Clients : entrer ou ne pas entrer.
- Fournisseur de service $\rightarrow$ Choix d'un taux de service.
- Optimiseur social $\rightarrow$ Type d'information à mettre à la disposition des clients (rendre le système observable ou non observable).

# Modélisation sous forme de jeux

- **Première étape :**

  L'optimiseur choisit une action : soit RI (révéler l'information sur l'état du système) ou bien NRI (ne pas révéler cette information). $S_1 = \{s_1^1, s_1^2\} = \{RI, NRI\}$.

- **Deuxième étape :**

  le fournisseur de service, étant informé du choix de l'optimiseur social, choisit un taux de service $\mu$ dans l'ensemble $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^m\}$, où $s_2^j = \mu_j, j = 1, ..., m$, et $\mu_m > \mu_{m-1} > ... > \mu_1$.

- **Troisième étape :**

  Les clients sont informés du choix des deux premiers agents et auront le choix entre entrer (action E) ou bien ne pas entrer (action NE). $S_3 = \{s_3^1, s_3^2\} = \{E, NE\}$.

# Modélisation sous forme de jeux

- **Première étape :**

  L'optimiseur choisit une action : soit RI (révéler l'information sur l'état du système) ou bien NRI (ne pas révéler cette information). $S_1 = \{s_1^1, s_1^2\} = \{RI, NRI\}$.

- **Deuxième étape :**

  le fournisseur de service, étant informé du choix de l'optimiseur social, choisit un taux de service $\mu$ dans l'ensemble $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^m\}$, où $s_2^j = \mu_j, j = 1, ..., m$, et $\mu_m > \mu_{m-1} > ... > \mu_1$.

- **Troisième étape :**

  Les clients sont informés du choix des deux premiers agents et auront le choix entre entrer (action E) ou bien ne pas entrer (action NE). $S_3 = \{s_3^1, s_3^2\} = \{E, NE\}$.

# Modélisation sous forme de jeux

- **Première étape :**

  L'optimiseur choisit une action : soit RI (révéler l'information sur l'état du système) ou bien NRI (ne pas révéler cette information). $S_1 = \{s_1^1, s_1^2\} = \{RI, NRI\}$.

- **Deuxième étape :**

  le fournisseur de service, étant informé du choix de l'optimiseur social, choisit un taux de service $\mu$ dans l'ensemble $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^m\}$, où $s_2^j = \mu_j, j = 1, ..., m$, et $\mu_m > \mu_{m-1} > ... > \mu_1$.

- **Troisième étape :**

  Les clients sont informés du choix des deux premiers agents et auront le choix entre entrer (action E) ou bien ne pas entrer (action NE). $S_3 = \{s_3^1, s_3^2\} = \{E, NE\}$.

# Modélisation sous forme de jeux

- **Première étape :**

  L'optimiseur choisit une action : soit RI (révéler l'information sur l'état du système) ou bien NRI (ne pas révéler cette information). $S_1 = \{s_1^1, s_1^2\} = \{RI, NRI\}$.

- **Deuxième étape :**

  le fournisseur de service, étant informé du choix de l'optimiseur social, choisit un taux de service $\mu$ dans l'ensemble $S_2 = \{s_2^1, s_2^2, ..., s_2^m\}$, où $s_2^j = \mu_j, j = 1, ..., m$, et $\mu_m > \mu_{m-1} > ... > \mu_1$.

- **Troisième étape :**

  Les clients sont informés du choix des deux premiers agents et auront le choix entre entrer (action E) ou bien ne pas entrer (action NE). $S_3 = \{s_3^1, s_3^2\} = \{E, NE\}$.

# Utilité des clients

**1. Si $s_1 = RI$ (cas observable) :**
Lorsque l'état du système est égal à $N(t) = n$, alors le client recevra un paiement de $R - C\frac{n+1}{\mu}$ s'il décide de rejoindre le système. Il aura un paiement égal zéro s'il décide de ne pas entrer.
Soit

$$z = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad le \ client \ choisit \ l'action \ E \ (entrer); \\ 0, & \text{si} \quad le \ client \ choisit \ l'action \ NE \ (ne \ pas \ entrer). \end{cases}$$

Alors,

$$U_3(RI, s_2, z, n) = (R - R_s - C\frac{n+z}{s_2})z. \tag{39}$$

# Utilité des clients

**2. Si $s_1 = NRI$ (cas non observable) :**

- Absence d'information.
- Probabilité d'entrée (p) $\rightarrow$ Croyance sur l'état du système.

$$U_3(NRI, s_2, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (U_3(RI, s_2, 1, n)p + U_3(RI, s_2, 0, n)(1-p))P_n,$$

Alors,

$$U_3(NRI, s_2, \alpha) = (R - R_s - C\frac{1}{s_2 - p\lambda})p. \quad (40)$$

# Utilité des clients

**2. Si $s_1 = NRI$ (cas non observable) :**

- Absence d'information.
- Probabilité d'entrée (p) $\rightarrow$ Croyance sur l'état du système.

$$U_3(NRI, s_2, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(U_3(RI, s_2, 1, n)p + U_3(RI, s_2, 0, n)(1-p))P_n,$$

Alors,

$$U_3(NRI, s_2, \alpha) = (R - R_s - C\frac{1}{s_2 - p\lambda})p. \qquad (40)$$

# Utilité du fournisseur de service

- Si $n > 0$, le gain du fournisseur de service, lorsque $s_2 = \mu$, est $\mu R_s - c(\mu)$ par unité de temps.
- Si $n = 0$, le fournisseur de service subit un coût $c(\mu)$ par unité de temps.

Alors,

$$U_2(s_1, s_2, \lambda_e^{s_1}(s_2)) = \lambda_e^{s_1}(s_2)R_s - c(s_2) = \lambda_e^{s_1}(\mu)R_s - c(\mu), \quad (41)$$

où $\lambda_e^{s_1}(s_2)$ est le taux d'entrée choisi par les clients lorsque l'optimiseur social choisit l'action $s_1$ et le fournisseur de service l'action $s_2$.

# Utilité du fournisseur de service

- Si $n > 0$, le gain du fournisseur de service, lorsque $s_2 = \mu$, est $\mu R_s - c(\mu)$ par unité de temps.
- Si $n = 0$, le fournisseur de service subit un coût $c(\mu)$ par unité de temps.

Alors,

$$U_2(s_1, s_2, \lambda_e^{s_1}(s_2)) = \lambda_e^{s_1}(s_2)R_s - c(s_2) = \lambda_e^{s_1}(\mu)R_s - c(\mu), \quad (41)$$

où $\lambda_e^{s_1}(s_2)$ est le taux d'entrée choisi par les clients lorsque l'optimiseur social choisit l'action $s_1$ et le fournisseur de service l'action $s_2$.

# Utilité de l'optimiseur social

- Bénéfice social.
- Somme des utilités de tous les agents.

$$U_1(s_1, s_2, \lambda_e^{s_1}(s_2)) = \lambda_e^{s_1}(s_2)(R - R_s) - C\overline{N}^{s_1}(s_2) + \lambda_e^{s_1}(s_2)R_s - c(s_2)$$

$$= \lambda_e^{s_1}(s_2)R - C\overline{N}^{s_1}(s_2) - c(s_2), \quad (42)$$

où $\overline{N}^{s_1}(s_2)$ est le nombre moyen de clients dans le système lorsque l'optimiseur social choisit l'action $s_1$, le fournisseur de service choisit l'action $s_2$ et les clients choisissent le taux d'entrée $\lambda_e^{s_1}(s_2)$.

# Utilité de l'optimiseur social

- Bénéfice social.
- Somme des utilités de tous les agents.

$$U_1(s_1, s_2, \lambda_e^{s_1}(s_2)) = \lambda_e^{s_1}(s_2)(R - R_s) - C\overline{N}^{s_1}(s_2) + \lambda_e^{s_1}(s_2)R_s - c(s_2)$$

$$= \lambda_e^{s_1}(s_2)R - C\overline{N}^{s_1}(s_2) - c(s_2), \qquad (42)$$

où $\overline{N}^{s_1}(s_2)$ est le nombre moyen de clients dans le système lorsque l'optimiseur social choisit l'action $s_1$, le fournisseur de service choisit l'action $s_2$ et les clients choisissent le taux d'entrée $\lambda_e^{s_1}(s_2)$.

# La forme extensive du jeu

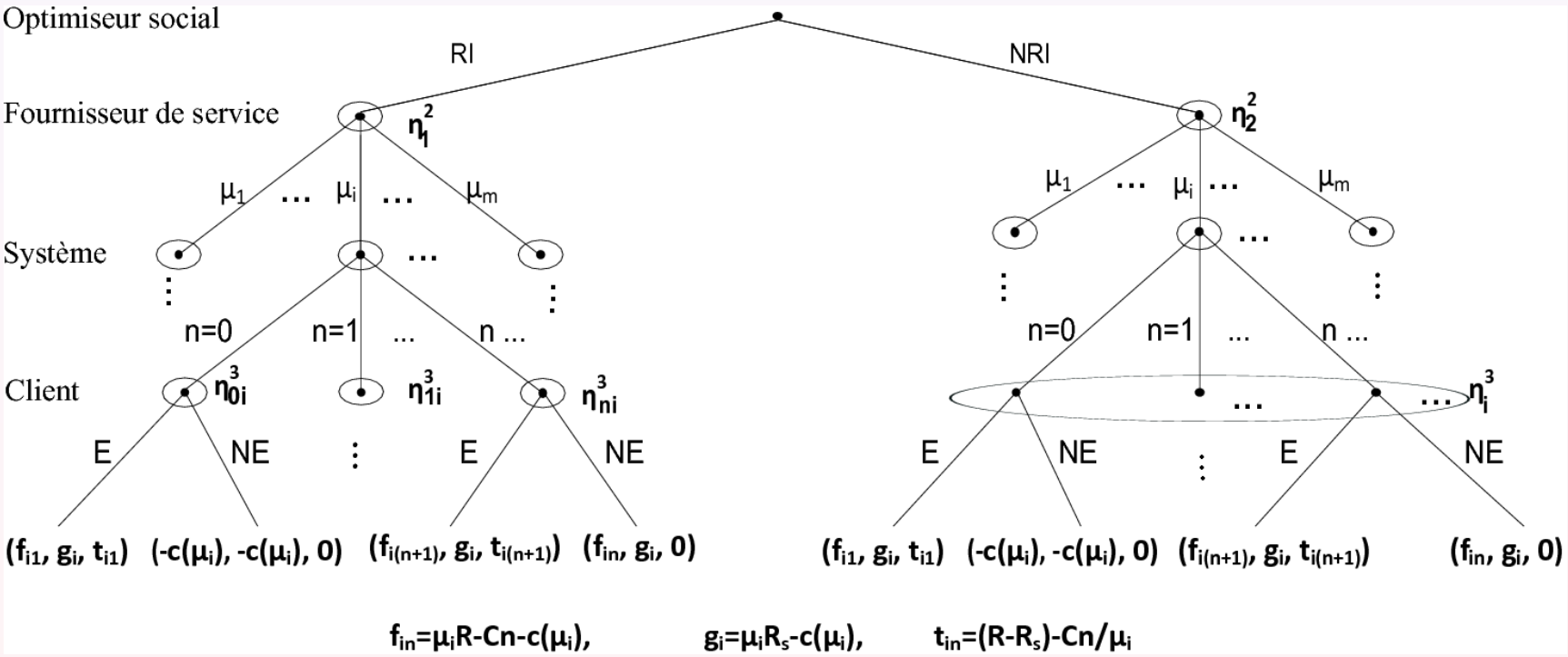



FIGURE 10: La forme extensive du jeu.

# Notations

- Nous notons par joueur 1 : l'optimiseur social, par joueur 2 : le fournisseur de service et par joueur 3 : un client.
- $I = \{1, 2, 3\}$ : l'ensemble des joueurs.
- $\eta^i$ : un ensemble d'information du joueur $i$ ;
- $N^i$ : l'ensemble des ensembles d'information du joueur $i$ ;
- $S^i_{\eta^i}$ : l'ensemble des actions du joueur $i$ relatif aux noeuds de décision de l'ensemble d'information $\eta^i \in N^i$ ;
- $Y_{\eta^i}$ : l'ensemble des distributions de probabilités sur l'ensemble $S_i$ des actions du joueur $i \in I$ relatif aux noeuds de décision appartenant à l'ensemble d'information $\eta^i \in N^i$;
- $Y_i = \bigcup_{\eta^i \in N^i} Y_{\eta^i}$;

On notera par

$$J =< I, \{\hat{\Gamma}^i\}_{i \in I}, \{\widehat{U}_i\}_{i \in I} >, \tag{43}$$

la forme normale du jeu sous forme extensive représenté par la figure 10, où $\widehat{U}_i$ est l'espérance des gains du joueur $i \in I$ associée aux choix des stratégies $\hat{\gamma}^i(.) \in \hat{\Gamma}^i, i \in I$.

# Résolution du jeu

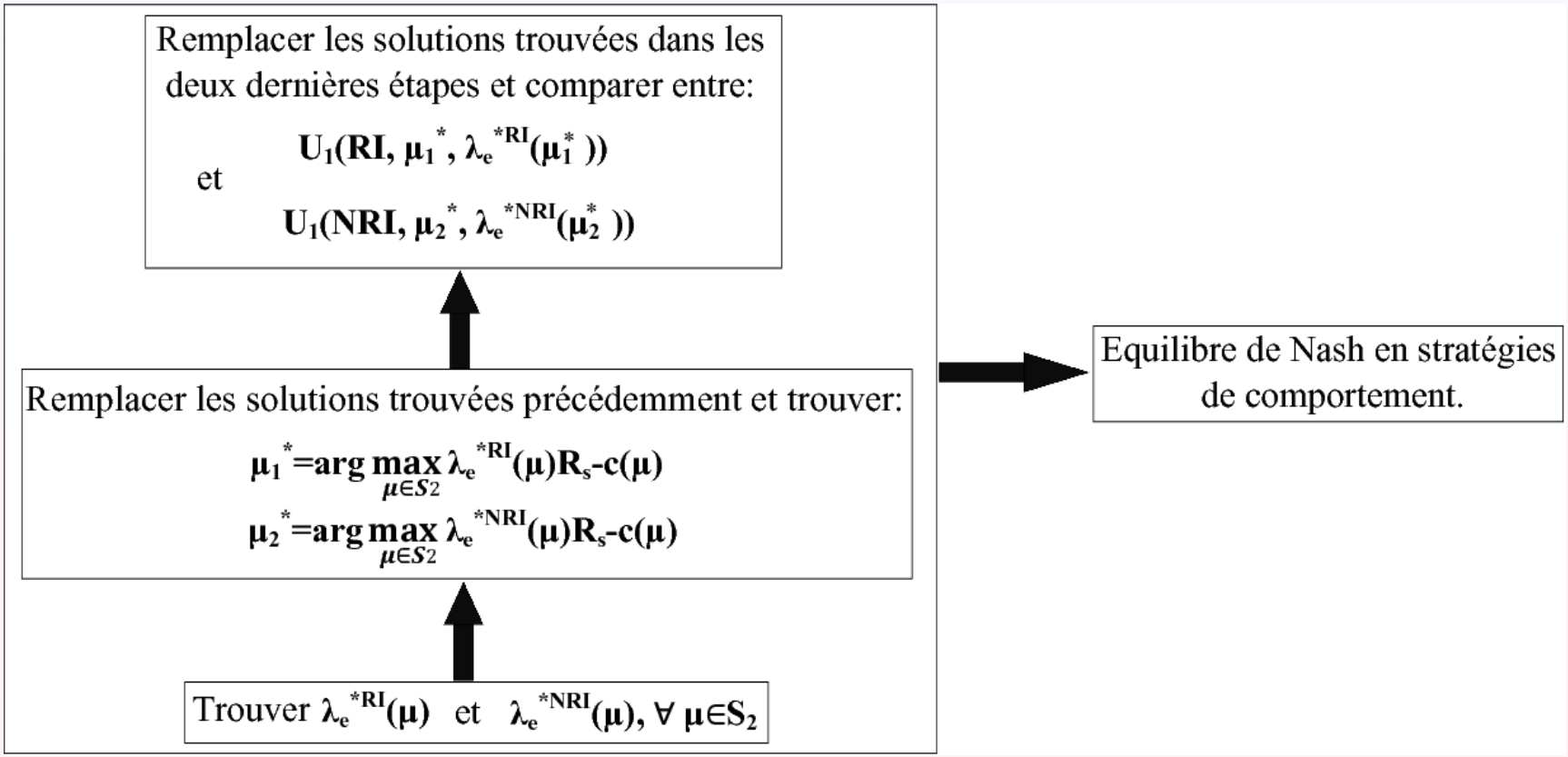



FIGURE 11: Schéma de résolution du jeu.

# Etude de la troisième étape du jeu

- Cas observable, $\mu$ fixe $\rightarrow$ Naor (1965) .
- Cas non observable, $\mu$ fixe $\rightarrow$ Edelson et Hildebrand (1975), hassin et haviv (2003), haviv (2009).
- Etude des variations des caractéristiques du système.

# Etude de la troisième étape du jeu

- Cas observable, $\mu$ fixe $\rightarrow$ Naor (1965) .
- Cas non observable, $\mu$ fixe $\rightarrow$ Edelson et Hildebrand (1975), hassin et haviv (2003), haviv (2009).
- Etude des variations des caractéristiques du système.

# Résolution du sous-jeu 1

$s_1 = RI, s_2 = \mu \in S_2$.

$$R - R_s - C\frac{n+1}{\mu} \geq 0 \Leftrightarrow n \leq \frac{(R-R_s)\mu}{C} - 1.$$

$$n_e(\mu) = [\frac{(R-R_s)\mu}{C}] - 1. \tag{44}$$

- Rejoindre le système si $N(t) \leq n_e(\mu)$ ;
- Ne pas rejoindre le système sinon.

# Résolution du sous-jeu 1

Ainsi,

$$\lambda_e^{*RI}(\mu) = \begin{cases} \frac{n_e(\mu)+1}{n_e(\mu)+2}\lambda, \text{ si } \mu = \lambda; \\ \frac{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{n_e(\mu)+1}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{n_e(\mu)+2}}\lambda, \text{ si } \mu \neq \lambda. \end{cases} \tag{45}$$

$$\overline{N}^{RI}(\mu) = \begin{cases} \frac{n_e(\mu)+1}{2}, \text{ si } \mu = \lambda; \\ \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{(n_e(\mu)+2)(\frac{\lambda}{\mu})^{n_e(\mu)+2}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{n_e(\mu)+2}}, \text{ si } \mu \neq \lambda. \end{cases} \tag{46}$$

# Résolution du sous-jeu 1

**Proposition 2 (Ziani et al.)**

*La fonction $\lambda_e^{*RI}$ est strictement croissante en $\mu$ sur l'ensemble $S_2$.*

# Résolution du sous-jeu 2

$s_1 = NRI, s_2 = \mu \in S_2$.
Résoudre l'équation

$$R - R_s - C\frac{1}{\mu - p\lambda} = 0. \tag{47}$$

D'où,

$$p_e(\mu) = \begin{cases} \frac{\mu - \frac{C}{R-R_s}}{\lambda}, & \text{si } 0 \leq \mu - \frac{C}{R-R_s} \leq \lambda\,; \\ 1, & \text{si } \lambda \leq \mu - \frac{C}{R-R_s}. \end{cases} \tag{48}$$

# Résolution du sous-jeu 2

Par conséquent,

$$\lambda_e^{*NRI}(\mu) = \begin{cases} \mu - \frac{C}{R-R_s}, & \text{si } 0 \leq \mu - \frac{C}{R-R_s} \leq \lambda\,; \\ \lambda, & \text{si } \lambda \leq \mu - \frac{C}{R-R_s}. \end{cases} \tag{49}$$

$$\overline{N}^{NRI}(\mu) = \frac{p_e(\mu)\frac{\lambda}{\mu}}{1 - p_e(\mu)\frac{\lambda}{\mu}}. \tag{50}$$

# Etude de la deuxième étape du jeu

Remplacer $\lambda_e^{*s_1}(\mu)$ dans $U_2$.

$$U_2(s_2) = \begin{cases} \lambda_e^{*RI}(s_2)R_s - as_2 - b, & \text{si } s_1 = RI\,; \\ \lambda_e^{*NRI}(s_2)R_s - as_2 - b, & \text{si } s_1 = NRI. \end{cases} \tag{51}$$

# Cas où l'optimiseur social ait choisi l'action RI

$$U_2(\mu) = U_2(RI, \mu, \lambda_e^{*RI}(\mu)) = \lambda_e^{*RI}(\mu)R_s - a\mu - b. \tag{52}$$

$$\widetilde{S_2} = Arg \max_{\mu \in S_2} \lambda_e^{*RI}(\mu)R_s - a\mu - b. \tag{53}$$

- Comme $S_2$ est un ensemble fini, alors $\widetilde{S_2} \neq \emptyset$, mais peut ne pas être un singleton.
- Satisfaire le maximum de clients.

D'après la proposition 2, le taux de service maximisant le taux d'entrée est donné par :

$$\widetilde{\mu} = \max_{\mu \in \widetilde{S_2}} \mu. \tag{54}$$

# Cas où l'optimiseur social ait choisi l'action RI

$$U_2(\mu) = U_2(RI, \mu, \lambda_e^{*RI}(\mu)) = \lambda_e^{*RI}(\mu)R_s - a\mu - b. \tag{52}$$

$$\widetilde{S_2} = Arg \max_{\mu \in S_2} \lambda_e^{*RI}(\mu)R_s - a\mu - b. \tag{53}$$

- Comme $S_2$ est un ensemble fini, alors $\widetilde{S_2} \neq \emptyset$, mais peut ne pas être un singleton.
- Satisfaire le maximum de clients.

D'après la proposition 2, le taux de service maximisant le taux d'entrée est donné par :

$$\widetilde{\mu} = \max_{\mu \in \widetilde{S_2}} \mu. \tag{54}$$

# Cas où l'optimiseur social ait choisi l'action NRI

$$U_2(\mu) = U_2(NRI, \mu, \lambda_e^{*NRI}(\mu)) = \lambda_e^{*NRI}(\mu)R_s - a\mu - b. \quad (55)$$

## Lemme (Ziani e al.)

*L'ensemble $S_2^*$ des points maximums de la fonction (55) est donné par :*

$$S_2^* = \begin{cases} \{\mu_m\}, & si\ \mu_m - \frac{C}{R-R_s} \leq \lambda\,; \\ \{\mu_1\}, & si\ \mu_1 - \frac{C}{R-R_s} \geq \lambda\,; \\ \begin{cases} \{\mu_1^*\},\ si\ (R_s - a)\mu_2^* + a\mu_1^* < \lambda + \frac{CR_s}{R-R_s}, \\ \{\mu_2^*\},\ si\ (R_s - a)\mu_2^* + a\mu_1^* > \lambda + \frac{CR_s}{R-R_s}, \\ \{\mu_1^*, \mu_2^*\},\ si\ (R_s - a)\mu_2^* + a\mu_1^* = \lambda + \frac{CR_s}{R-R_s}, \end{cases} & sinon, \end{cases} \tag{56}$$

*où*

$$\mu_1^* = \max_{\mu \in S_2}\{\mu,\ \ tel\ que\ \ \mu - \frac{C}{R-R_s} < \lambda\}, \tag{57}$$

*et*

$$\mu_2^* = \min_{\mu \in S_2}\{\mu,\ \ tel\ que\ \ \mu - \frac{C}{R-R_s} \geq \lambda\}. \tag{58}$$

Dans le cas où $|S_2^*| = 2$, le fournisseur de service choisit le taux de service permettant de maximiser le taux d'entrée des clients au système, donné par :

$$\mu^* = \max_{\mu \in S_2^*} \mu. \tag{59}$$

# Etude de la première étape du jeu

- Remplacer les solutions trouvées dans la deuxième et troisième étape.
- Soit $\widetilde{\rho} = \frac{\lambda}{\widetilde{\mu}}$, $\widetilde{n_e} = n_e(\widetilde{\mu})$, $\widetilde{\lambda_e} = \widetilde{\lambda_e}^{*RI}(\widetilde{\mu})$ les valeurs obtenues dans le cas observable ($s_1 = RI$) lorsque le serveur utilise le taux de service $\widetilde{\mu}$ et par $\rho^* = \frac{\lambda}{\mu^*}$, $p_e^* = p_e(\mu^*)$, $\lambda^* = \lambda_e^{*RI}(\mu^*)$ celles obtenues dans le cas non observable ($s_1 = NRI$) lorsque le serveur utilise le taux de service $\mu^*$. On aura :

# Etude de la première étape du jeu

$$U_1(RI, \widetilde{\mu}, \widetilde{\lambda_e}) = \begin{cases} \frac{1-\widetilde{\rho}^{\widetilde{n_e}+1}}{1-\widetilde{\rho}^{\widetilde{n_e}+2}} R\lambda - C\left(\frac{\widetilde{\rho}}{1-\widetilde{\rho}} - \frac{(\widetilde{n_e}+2)\widetilde{\rho}^{\widetilde{n_e}+2}}{1-\widetilde{\rho}^{\widetilde{n_e}+2}}\right) - a\widetilde{\mu} - b, & \text{si } \widetilde{\mu} \neq \lambda\,; \\ \frac{\widetilde{n_e}+1}{\widetilde{n_e}+2}\lambda R - C\frac{\widetilde{n_e}+1}{2} - a\widetilde{\mu} - b, & \text{si } \widetilde{\mu} = \lambda. \end{cases} \tag{60}$$

$$U_1(NRI, \mu^*, \lambda_e^*) = p_e^*\lambda R - C\frac{p_e^*\rho^*}{1 - p_e^*\rho^*} - a\mu^* - b. \tag{61}$$

- Comparer entre (60) et (61).

## Définition 3

*Un profil de stratégies dans un jeu dynamique $J$ est un équilibre de Nash parfait en sous-jeux s'il correspond à un équilibre de Nash dans chaque sous-jeu du jeu $J$. En d'autres termes, si les joueurs jouent à un jeu plus restreint que le jeu $J$, alors leurs stratégies de comportements resteront un équilibre de Nash dans le jeu restreint.*

## Théorème 3 (Ziani et al.)

*Dans la file d'attente $M/M/1$, il existe deux taux de service $\widetilde{\mu}$ et $\mu^*$ définis respectivement par (54) et (59), un seuil $n_e(\mu) = \lfloor \frac{(R-R_s)\mu}{C} \rfloor - 1$ et une probabilité $p_e(\mu)$ définie par (48), pour lesquels : $\widetilde{n_e} = n_e(\widetilde{\mu})$, $p_e^* = p_e(\mu^*)$, et $\widetilde{\overline{N}} = \overline{N}^{RI}(\widetilde{\mu})$, $\overline{N}^* = \overline{N}^{NRI}(\mu^*)$, $\widetilde{\lambda_e} = \lambda_e^{*RI}(\widetilde{\mu})$, $\lambda_e^* = \lambda_e^{*NRI}(\mu^*)$ définis respectivement par (46), (50), (45), (49) en remplaçant $\mu$ par les valeurs correspondantes $\widetilde{\mu}$ et $\mu^*$, tels que le triplet de stratégies $(\hat{\gamma}^{1*}(\eta^1), \hat{\gamma}^{2*}(\eta^2), \hat{\gamma}^{3*}(\eta^3))$, définies ci-après, constitue un équilibre de Nash parfait en sous-jeux dans l'espace $\hat{\Gamma}^1 \times \hat{\Gamma}^2 \times \hat{\Gamma}^3$ des stratégies de comportement pour le jeu défini par (43) :*

$$\hat{\gamma}^{1*} = \begin{cases} RI & si\ (\widetilde{\lambda_e} - \lambda_e^*)R - C(\widetilde{\overline{N}} - \overline{N}^*) \geq a(\widetilde{\mu} - \mu^*)\ ; \\ NRI & si\ (\widetilde{\lambda_e} - \lambda_e^*)R - C(\widetilde{\overline{N}} - \overline{N}^*) \leq a(\widetilde{\mu} - \mu^*). \end{cases} \quad (62)$$

$$\hat{\gamma}^{2*}(\eta^2) = \begin{cases} \widetilde{\mu} & \text{si } \eta^2 = \eta^2_1\,; \\ \mu^* & \text{si } \eta^2 = \eta^2_2. \end{cases} \tag{63}$$

$$\hat{\gamma}^{3*}(\eta^3) = \begin{cases} E & \text{si } \eta^3 = \eta^3_{k\widetilde{i}}, 0 \leq k \leq \widetilde{n}_e, \text{ où } \mu_{\widetilde{i}} = \widetilde{\mu}\,; \\ NE & \text{si } \eta^3 = \eta^3_{k\widetilde{i}}, k > \widetilde{n}_e; \\ \begin{cases} \text{E, avec p=}p^*_e \\ \text{NE, avec p=}1 - p^*_e \end{cases} & \text{si } \eta^3 = \eta^3_{i^*}, \text{ où } \mu_{i^*} = \mu^*. \end{cases} \tag{64}$$

Les utilités à l'équilibre sont données comme suit :

$$\hat{U}_1(\hat{\gamma}^{1*},\hat{\gamma}^{2*},\hat{\gamma}^{3*}) = \begin{cases} \widetilde{\lambda_e}R - C\widetilde{\overline{N}} - c(\widetilde{\mu}), & \text{si } y \geq z, \\ \lambda_e^* R - C\overline{N}^* - c(\mu^*), & \text{si } y \leq z\,; \end{cases} \tag{65}$$

$$\hat{U}_2(\hat{\gamma}^{1*},\hat{\gamma}^{2*},\hat{\gamma}^{3*}) = \begin{cases} R_s\widetilde{\mu} - c(\widetilde{\mu}), & \text{si } y \geq z, \\ R_s\mu^* - c(\mu^*), & \text{si } y \leq z\,; \end{cases} \tag{66}$$

$$\hat{U}_3(\hat{\gamma}^{1*},\hat{\gamma}^{2*},\hat{\gamma}^{3*}) = \begin{cases} \begin{cases} R - R_s - C\frac{n+1}{\mu}, \text{ si } n \leq \widetilde{n}_e, \\ 0, \text{ sinon,} \end{cases} & \text{si } y \geq z, \\ (R - R_s - C\frac{1}{\mu^* - p_e^*\lambda})p_e^*, & \text{si } y \leq z, \end{cases} \tag{67}$$

où $y = (\widetilde{\lambda_e} - \lambda_e^*)R - C(\widetilde{\overline{N}} - \overline{N}^*)$ et $z = a(\widetilde{\mu} - \mu^*)$.

# Application

# Application

Paramères d'entrée du système: $\lambda$, R, $R_s$, C, a, b

# Application

Paramères d'entrée du système: $\lambda$, R, $R_s$, C, a, b

$\Downarrow$

Calculer: $\widetilde{\mu}$, $\mu^*$, $\lambda_e^*$, $\widetilde{\lambda_e}$, $\widetilde{\overline{N}}$, $\overline{N}^*$ à l'aide de (54), (59), (49), (45), (46), (50)

et $y = (\widetilde{\lambda_e} - \lambda_e^*)R - C(\widetilde{\overline{N}} - \overline{N}^*)$, $z = a(\widetilde{\mu} - \mu^*)$

# Application

Paramères d'entrée du système: $\lambda$, R, $R_S$, C, a, b

Calculer: $\widetilde{\mu}$, $\mu^*$, $\lambda_e^*$, $\widetilde{\lambda_e}$, $\widetilde{\overline{N}}$, $\overline{N}^*$ à l'aide de (54), (59), (49), (45), (46), (50)

et $y = (\widetilde{\lambda_e} - \lambda_e^*)R - C(\widetilde{\overline{N}} - \overline{N}^*)$, $z = a(\widetilde{\mu} - \mu^*)$

si $y \geq z$

Décision optimale de l'optimiseur social: RI

# Application

Paramères d'entrée du système: $\lambda$, R, $R_S$, C, a, b

⇩

Calculer: $\widetilde{\mu}$, $\mu^*$, $\lambda_e^*$, $\widetilde{\lambda_e}$, $\widetilde{\overline{N}}$, $\overline{N}^*$ à l'aide de (54), (59), (49), (45), (46), (50)

et $y = (\widetilde{\lambda_e} - \lambda_e^*)R - C(\widetilde{\overline{N}} - \overline{N}^*)$, $z = a(\widetilde{\mu} - \mu^*)$

si $y \geq z$

Décision optimale de l'optimiseur social: RI

⇩

Décision optimale du fourniseur de service: $\widetilde{\mu}$

# Application

Paramères d'entrée du système: $\lambda$, R, $R_S$, C, a, b

Calculer: $\widetilde{\mu}$, $\mu^*$, $\lambda_e^*$, $\widetilde{\lambda_e}$, $\widetilde{\overline{N}}$, $\overline{N}^*$ à l'aide de (54), (59), (49), (45), (46), (50)

et $y = (\widetilde{\lambda_e} - \lambda_e^*)R - C(\widetilde{\overline{N}} - \overline{N}^*)$, $z = a(\widetilde{\mu} - \mu^*)$

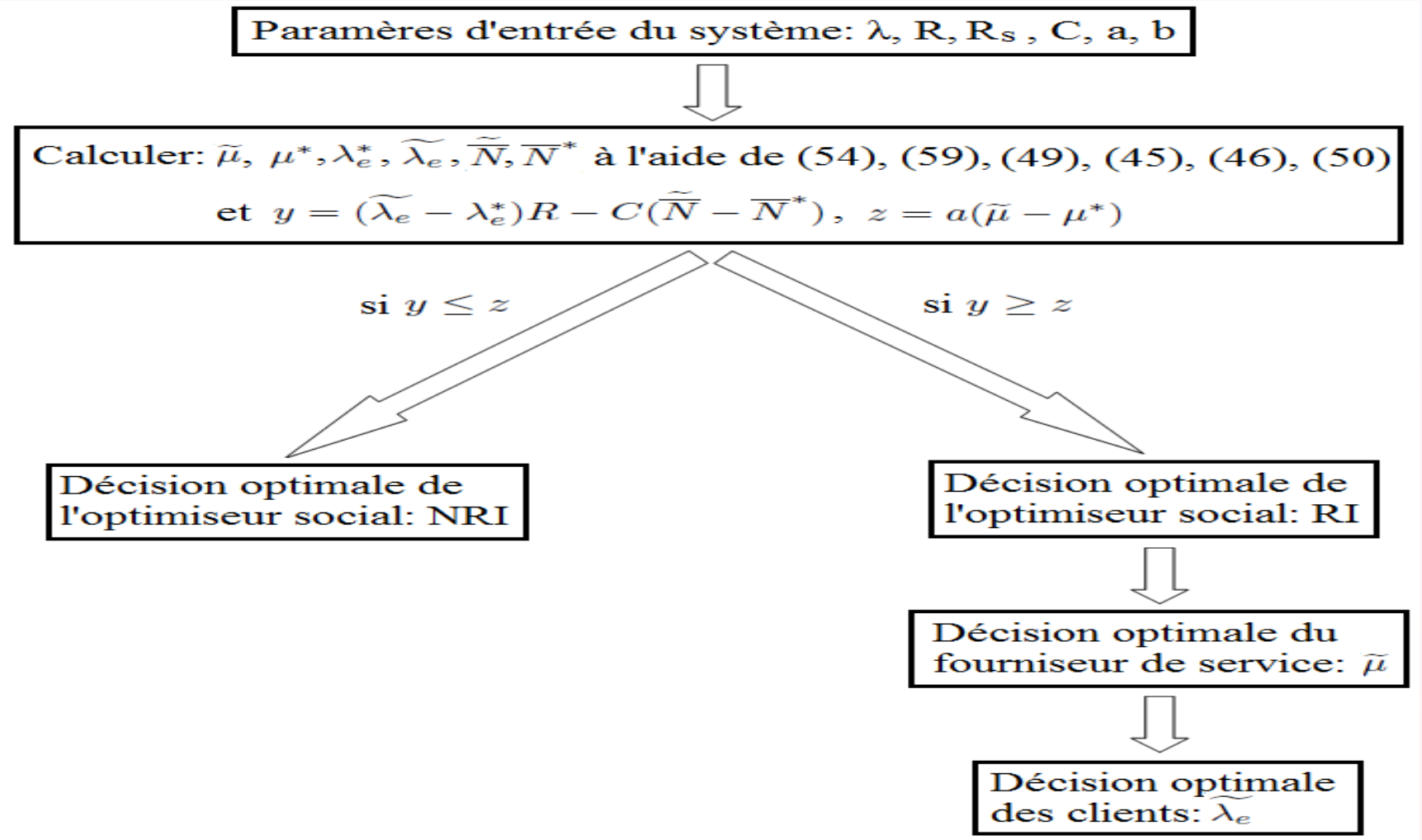
si $y \geq z$

Décision optimale de l'optimiseur social: RI

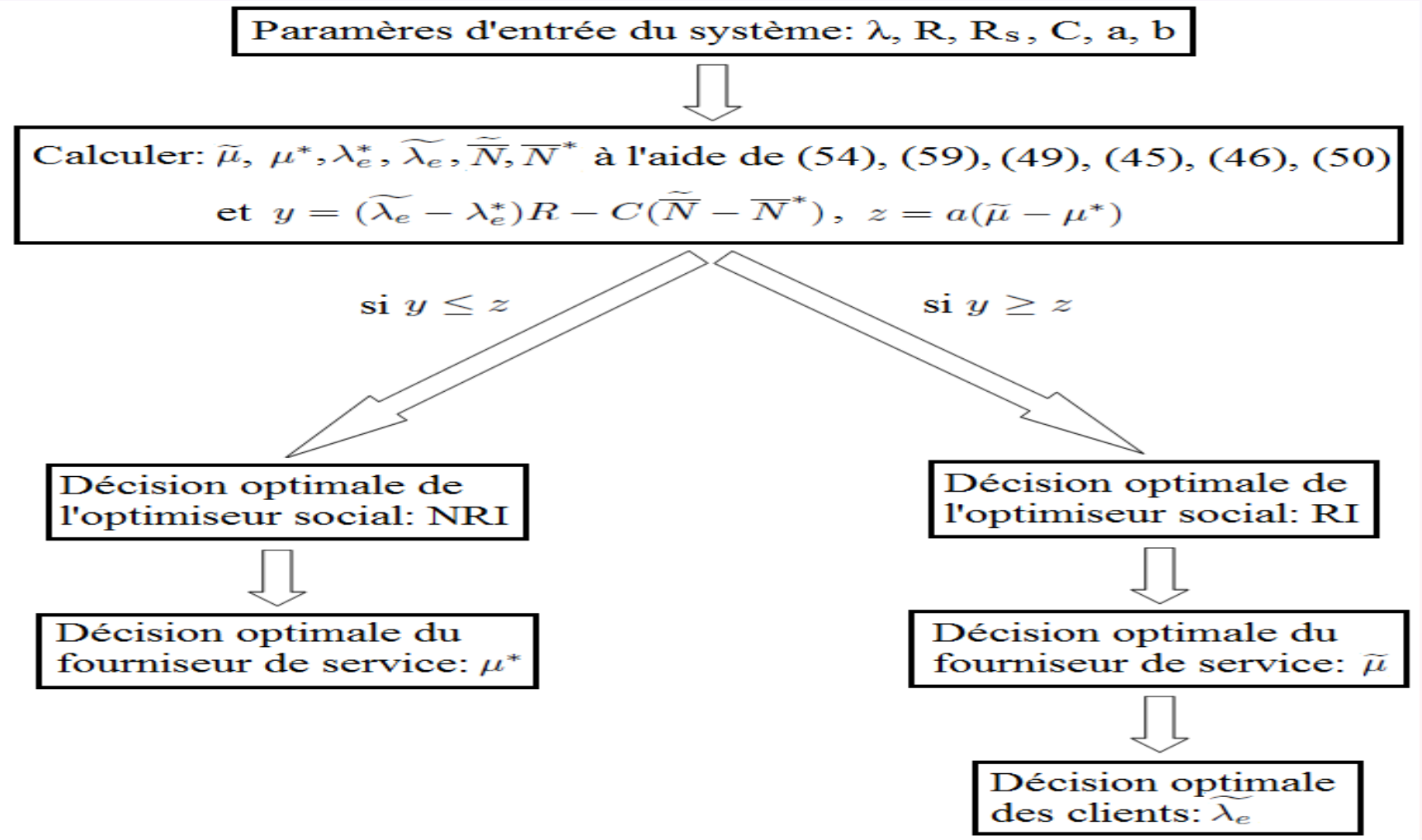
Décision optimale du fourniseur de service: $\widetilde{\mu}$

Décision optimale des clients: $\widetilde{\lambda_e}$

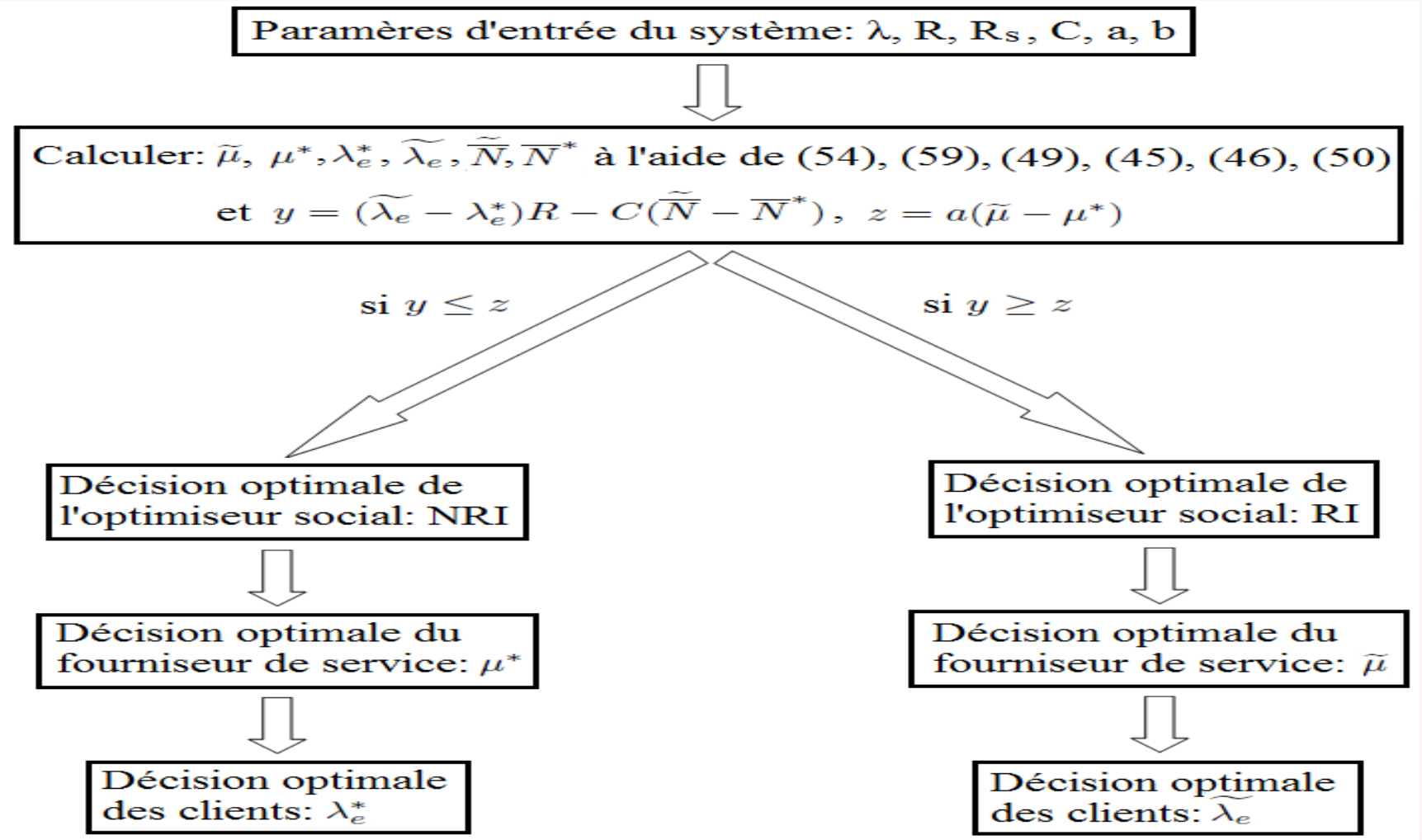
# Application



# Application



# Application



# Illustration

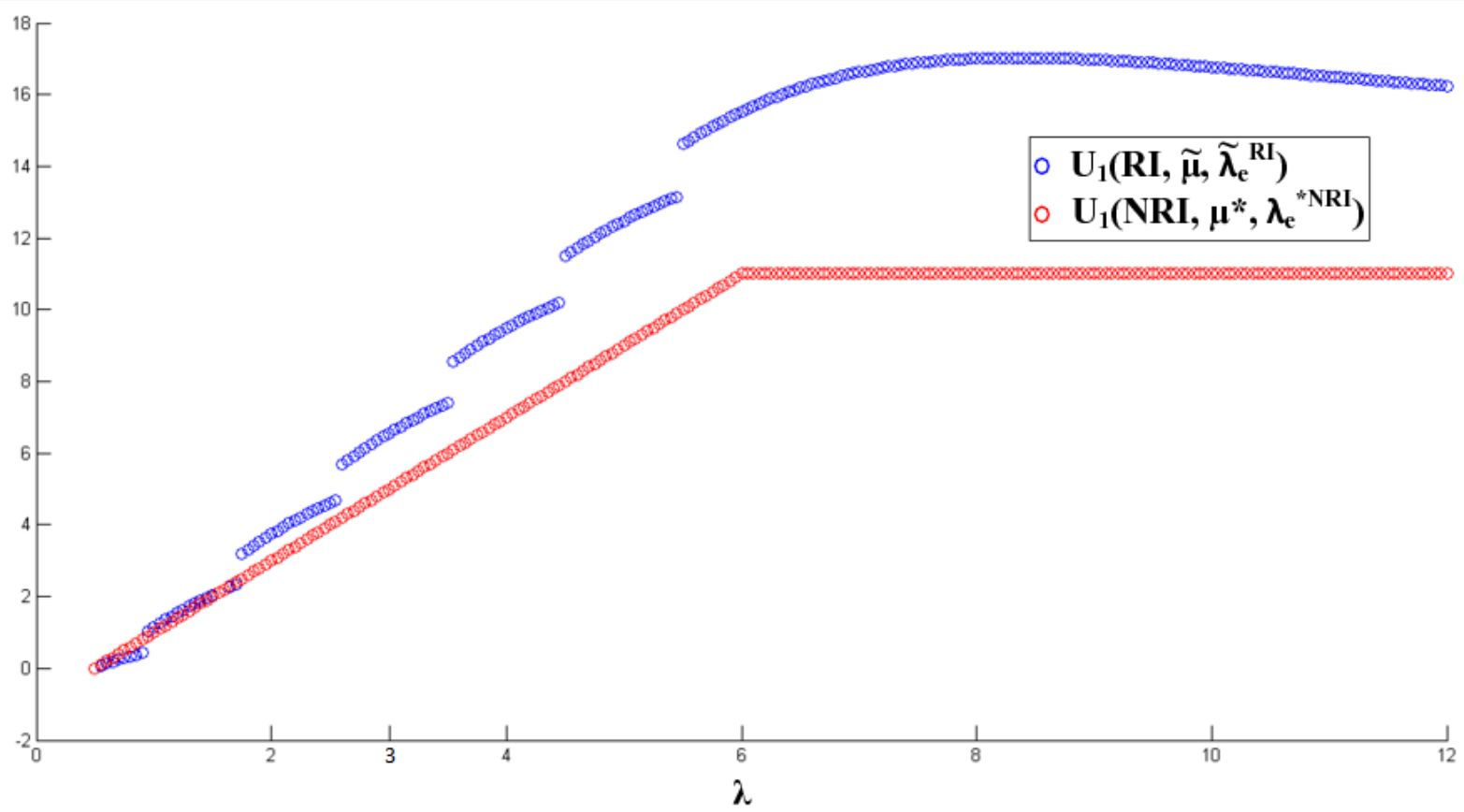



FIGURE 12: Variation de l'utilité de l'optimiseur social sous l'optimalité des décisions des clients et du fournisseur de service en fonction de $\lambda$.

# Illustration

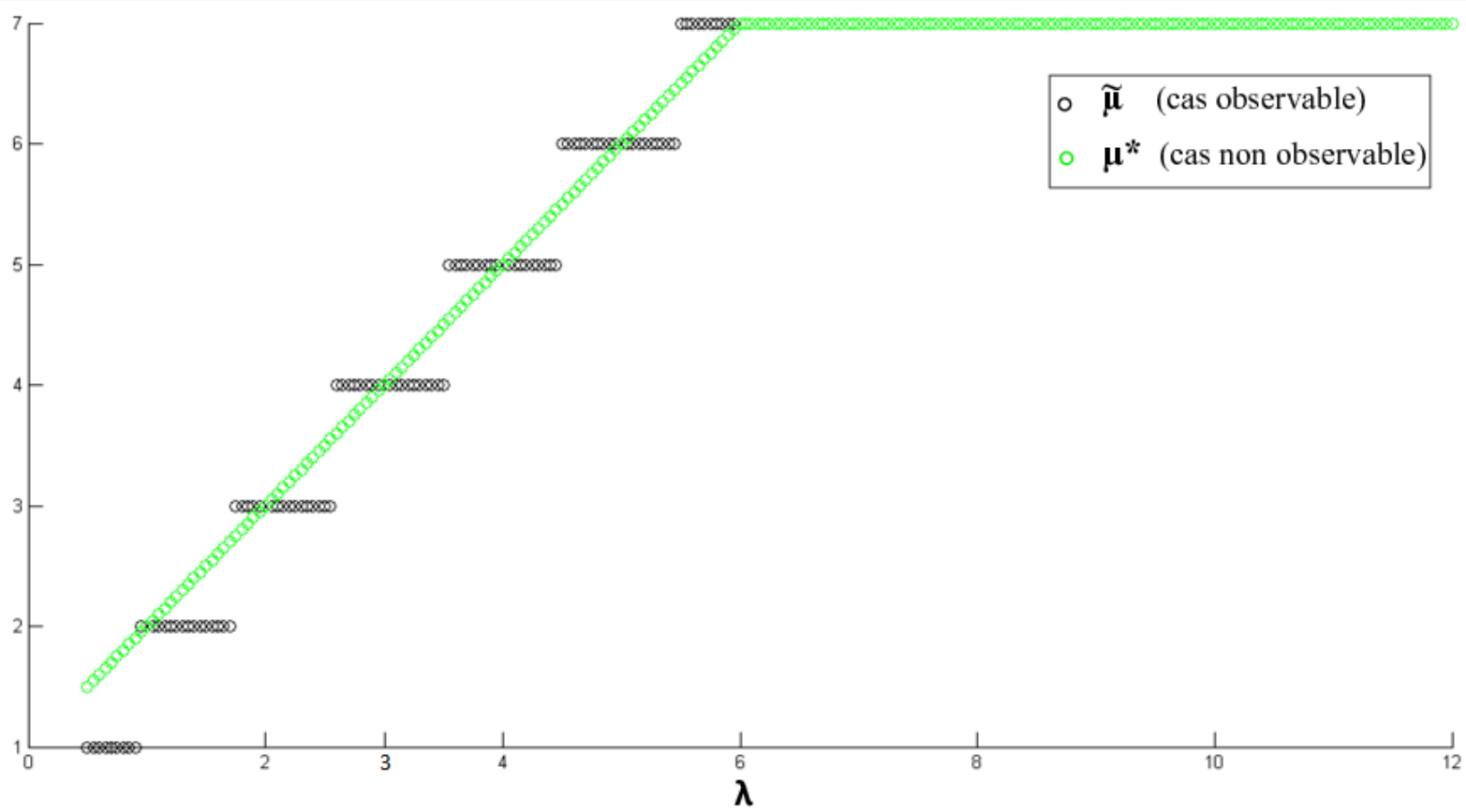



FIGURE 13: Variation de la meilleure réponse du fournisseur de service en fonction de $\lambda$.

# Illustration

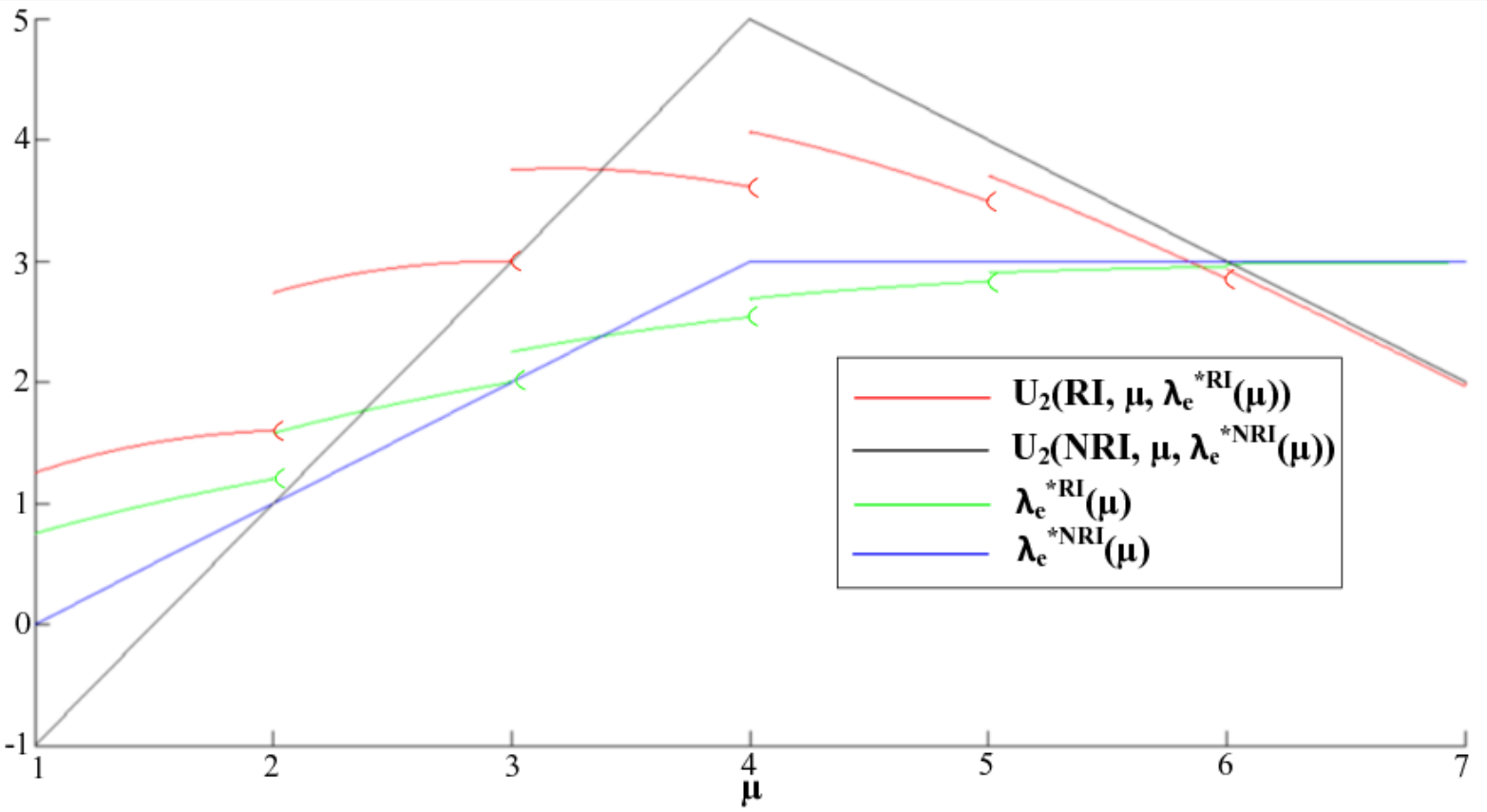



FIGURE 14: Variation des utilités du fournisseur de service sous l'optimalité des décisions des clients, et des taux d'entrée en fonction de $\mu$, pour $\lambda = 3$.

1 Introduction

2 Comportement stratégique dans un système $M^2/M/1$
- Description du modèle
- Cas observable
- Cas non observable
- Effets de l'information

3 Analyse comportementale d'un système $M/M/1$
- Description du modèle
- Modélisation sous forme de jeu
- Résolution du jeu
- Illustration

4 Conclusion

## Conclusion

- Étude des comportements stratégiques des différents agents dans quelques systèmes d'attente.
- Les clients prennent des décisions sur la base des utilités récompense-coût.
- La comparaison entre les cas considérés s'avère nécessaire pour maximiser le rendement du système.
- La modélisation que nous avions proposée dans le cadre du système $M/M/1$ peut servir à l'étude d'autres problèmes et situations plus générales, comme le problème de tarification de service (pricing), il suffira de définir les éléments associés et les intégrer au modèle.

# Perspectives

- Généraliser l'étude des comportements stratégiques des clients aux systèmes d'attente $M^k/M/1$ (k fixe) et $M^X/M/1$ ($X$ aléatoire) .
- Étudier le problème de tarification de service (pricing) dans les systèmes d'attente avec arrivées par groupe avec interaction stratégique entre les clients.
- Etude des comportements stratégiques lorsque le coût d'opération de service dépend de l'utilisation du serveur.
- Trouver des modèles de jeux permettant de visualiser certaines situations rencontrées dans la littérature, concernant les comportements stratégiques des agents d'un système d'attente.
- Généraliser les études menées aux cas des systèmes avec services et/ou arrivées généraux.
- Étudier les comportements stratégiques des agents d'un système d'attente en intégrant le facteur d'escompte aux utilités des agents.
- Étude de la transmission stratégique d'information et choix optimale d'une politique d'information.

# Références

[1] Boudali, O. Economou, A. Optimal and equilibrium balking strategies in the single server Markovian queue with catastrophes. European Journal of Operational Research 218 (2012), 708-715

[2] Burnetas, A., Economou, A. Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. Queueing Systems, 56, 213-228 (2007)

[3] Edelson, N. M., Hildebrand, D. K. Congestion tolls for Poisson queueing processes. Econometrica, 43, 81-92 (1975)

[4] Hassin, R. Consumer information in markets with random product quality : the case of queue and balking. Econometrica, 54, 1185-1195 (1986)

[5] Hassin, R. Rational Queueing. 378 pages. CRC Press, Boca Raton (2016)

[6] Hassin, R., Haviv, M. To Queue or Not to Queue : Equilibrium Behavior in Queueing Systems. 199 pages. Kluwer Academic, Boston (2003)
[7] Naor, P. The regulation of queue size by levying tolls. Econometrica, 37, 15-24 (1969) [8] Shone, R., Knight, V. A., Williams, J. E. Comparisons between observable and unobservable $M/M/1$ queues with respect to optimal customer behavior, European Journal of Operational Research, 227, 133-141 (2013)
[9] Simhon, E., Hayel, Y., Starobinski, D., Zhuc, Q. Optimal information disclosure policies in strategic queueing games. Operations Research Letters, 44, 109-113 (2016)

[10] Ziani, S., Rahmoune, F., Radjef, M. S. Customers' strategic behavior in batch arrivals $M^2/M/1$ queue. European Journal of Operational Research, 247, 895-903 (2015)
[11] Ziani, S., Rahmoune, F., Radjef, M. S. Equilibrium behavioral strategies in an $M/M/1$ queue. Submitted to Queueing systems (2016)

# Merci pour votre attention