COSI'2014, UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA, BEJAIA
08-10 Juin 2014

SCHEDULING WITH AGREEMENTS : RECENT RESULTS

Présenté par

Dr. Mohamed BENDRAOUCHE et Pr. Mourad BOUDHAR
Dépt. Maths., USDBlida Fac. Maths., USTHB Alger

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

1. Définition du problème traité et notation
2. Motivation
3. Etat de l'art
4. Nouveaux résultats obtenus : cas de deux machines :

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Définition du problème

Il s'agit d'ordonnancer un ensemble de n tâches non préemptives $V = \{J_1, J_2, ...J_n\}$ sur m machines parallèles identiques en minimisant la date de fin de traitement (le makespan).
Chaque tâche J_i possède :

- une durée de traitement p_i
- une date de disponibilité r_i

Nous supposons qu'il existe un graphe $G = (V, E)$ dit "graphe de concordance" tel que deux tâches sont reliées dans G si et seulement si ces deux tâches peuvent être traitées simultanément sur deux machines différentes (dites concordantes)

Notation

Dans la littérature ce problème est nommé :

Scheduling With Agreements (S.W.A)

Titre en français : PROBLEME D'ORDONNANCEMENT AVEC GRAPHE DE CONCORDANCE : NOUVEAUX RESULTATS

Il est noté : $\mathbf{P} \mid \mathbf{AgreeG} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), \mathbf{r}_i \mid \mathbf{Cmax}$

Exemple illustratif

Exemple

Le nombre de tâches $n = 5$
Le nombre de machines
$m = 2$

Les durées de traitement :

J_i	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
p_i	1	2	1	3	1

Graphe de concordance

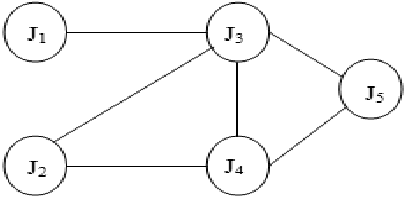

FIGURE: Le graphe de concordance

Exemple illustratif (suite)

Solution optimale

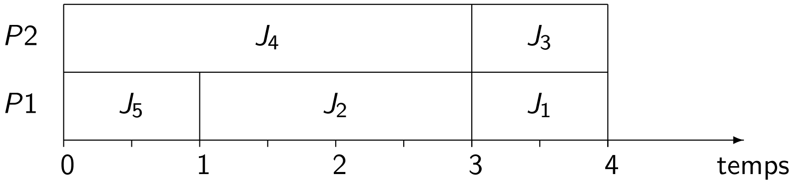

FIGURE: Diagramme de Gantt de l'exemple, $Cmax^* = 4$

Plan de l'exposé

Motivation

Planification d'horaires de travail :
n tâches T_1, T_2, ..., T_n doivent être exécutées sur des intervalles de temps $[d_i, f_i]$. La règlementation impose pas plus de m tâches par employer. Sachant que les tâches affectées à un employer ne doivent pas se chevaucher, trouver un planning pour l'entreprise utilisant un nombre minimum d'employés.

Motivation

Planification d'horaires de travail :
n tâches T_1, T_2, ..., T_n doivent être exécutées sur des intervalles de temps $[d_i, f_i]$. La règlementation impose pas plus de m tâches par employer. Sachant que les tâches affectées à un employer ne doivent pas se chevaucher, trouver un planning pour l'entreprise utilisant un nombre minimum d'employés.

modélisation :
A chaque tâche T_i, $i = \overline{1, n}$ on fait correspondre une tâche T_i', du problème avec graphe de concordance, de durée 1. Le graphe de concordance $G = (V, E)$ est tel que $V = \{T_1', T_2', ..., T_n'\}$ et $\{T_i', T_j'\} \in E \iff$ les tâches T_i et T_j ne se chevauchent pas.

Ce problème s'écrit : $\mathbf{Pm|AgreeG = (V, E), p_i = 1|C_{max}}$
la valeur optimale du $Cmax$ = le nombre minimum d'employers

Plan de l'exposé

Etat de l'art

G. Even et al. (2009) ont considéré une version équivalente à notre problème en utilisant le graphe complémentaire du graphe de concordance : **graphe de conflit**

Cette version est connue sous le nom : **Scheduling With Conflicts (S.W.C)**

$\mathbf{P} \mid \mathbf{AgreeG} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), \mathbf{r}_i \mid \mathbf{C}_{\max} \Longleftrightarrow$ **Problème S.W.C avec graphe de conflit** $\overline{G}$

Etat de l'art : cas m=2

- **G. Even et al. (2009)** ont montré que le problème $\mathbf{P}2 \mid \mathbf{AgreeG} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), \mathbf{p}_i \in \{1, 2\} \mid \mathbf{C}_{\max}$ **est Polynomial**

Etat de l'art : cas m=2

- **G. Even et al. (2009)** ont montré que le problème $P2 \mid \mathbf{AgreeG = (V, E), p_i \in \{1, 2\}} \mid \mathbf{C_{max}}$ **est Polynomial**
- Les mêmes auteurs ont montré que le problème $P2 \mid \mathbf{AgreeG = (V, E), p_i \in \{1, 2, 3, 4\}} \mid \mathbf{C_{max}}$ **est NP-difficile**

Etat de l'art : cas m=2

- **G. Even et al. (2009)** ont montré que le problème $\mathbf{P}2 \mid \mathbf{AgreeG} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), \mathbf{p}_i \in \{1, 2\} \mid \mathbf{C}_{\max}$ **est Polynomial**
- Les mêmes auteurs ont montré que le problème $\mathbf{P}2 \mid \mathbf{AgreeG} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), \mathbf{p}_i \in \{1, 2, 3, 4\} \mid \mathbf{C}_{\max}$ **est NP-difficile**
- **M. Bendraouche et M. Boudhar (2012)** ont généralisé le résultat précédent et ont montré que le problème $\mathbf{P}2 \mid \mathbf{AgreeG} = (\mathbf{V}, \mathbf{E}), \mathbf{p}_i \in \{1, 2, 3\} \mid \mathbf{C}_{\max}$ est NP-difficile même pour les graphes bipartis

Etat de l'art : autres résultats récents de M. Bendraouche et M. Boudhar

Problème	Complexité
$P2 \| AgreeG = (S_1, S_2; E), r_i \in \{0, r\}, p_i \in \{1, 2\} \| C_{max}$	NP-difficile
$P2 \| AgreeG = (S_1, S_2; E), p_{S_1} = 1 \| C_{max}$	Polynomial en $O(n^3)$
$P \| AgreeG = (K_1, K_2; E), r_i \in \{0, 1, 2\}, p_i = 1, \| C_{max}$	NP-difficile pour $m \geq n$
$P \| AgreeG = (K_1, K_2; E), p_i = 1 \| C_{max}$	Polynomial en $O(n^2)$ $m \geq n$, r_i impaires
$P2 \| AgreeG = (K, S; E) \| C_{max}$	NP-difficile
$P2 \| AgreeG = (K, S; E), p_i \in \{1, 2\}, r_i \in \{0, r\} \| C_{max}$	NP-difficile
$P2 \| AgreeG = (K, S; E), p_K = 1 \| C_{max}$	Polynomial en $O(n^3)$

Etat de l'art : cas $p_i = 1$, $r_i = 0$

Le problème $\mathbf{P|AgreeG = (V, E), p_i = 1|C_{max}}$ est connu sous le nom : Problème d'ordonnancement avec exclusion mutuelle

Mutual Exclusion Scheduling (M.E.S), BS. Baker et EG. Coffman (1996)

$\mathbf{P|AgreeG = (V, E), p_i = 1|C_{max}}$ $\Longleftrightarrow$ **Problème M.E.S** $\Longleftrightarrow$ **S.W.C avec** $\mathbf{p_i = 1}$

Etat de l'art : cas $p_i = 1$, $r_i = 0$

Problèmes NP-difficiles

AgreeG = (V, E)	**Condition**	**Référence**
arbitraire	$m \geq 3$, fixé	BS. Baker,EG. Koffman, 1996
compl. de gr. biparti	$m \geq 4$, fixé	HL. Bodlaender, K. Jansen,1995
compl. de cographe	$m \geq 4$, fixé	HL. Bodlaender, K. Jansen,1995
compl. de gr. d'intervalles	$m \geq 4$, fixé	HL. Bodlaender, K. Jansen,1995
compl. de gr. triangulé	$m \geq 3$, fixé	DG. Corneil, 1985
de comparabilité	$m \geq 3$, fixé	K. Jansen, 2003
adjoints	$m \geq 3$, fixé	E. Cohen, M. Tarsi, 1991
compl. de gr. de permu.	$m \geq 6$, fixé	K. Jansen, 2003

Etat de l'art : cas $p_i = 1$, $r_i = 0$

Problèmes Polynomiaux

$\mathbf{AgreeG = (V, E)}$	**Référence**
gr. scindé	HL. Bodlaender, K. Jansen, 1995
compl. forêt	BS. Baker, EG. Koffman, 1996
compl. arbre	BS. Baker, EG. Koffman, 1996
compl. collection de cliques disjointes	D. De Werra, 1997
compl. gr. bipartis (m fixé)	P. Hansen et al., 1993
gr. fortement triangulés	E. Dahlhaus, M. Karpinski, 1998
compl. gr. de largeur arbre bornée	HL. Bodlaender, FV. Fomin,2004
compl. gr. adjoints (m fixé)	N. Alon, 1983
compl. cographes (m fixé)	Z. Lonc, 1991
compl. graphes d'intervalles propres	F. Gardi, 1979

Etat de l'art : cas $p_i = 1$, r_i arbitraires

Problèmes NP-difficiles

Problème	**Référence**
$P2 \mid AgreeG=(V,E), r_i, p_i=1 \mid C_{max}$	M. Boudhar, G. Finke, 2000
$P \mid AgreeG=(V,E), m \geq n, p_i=1 \mid C_{max}$	M. Boudhar, G. Finke, 2000
$P2 \mid AgreeG=(S_1, S_2 ; E), r_i, p_i=1 \mid C_{max}$	M. Boudhar, 2003
$P \mid AgreeG=(K_1, K_2 ; E), m \geq n, r_i, p_i=1 \mid C_{max}$	M. Boudhar, A. Khelladi, 2004
$P \mid AgreeG, r_i, p_i=1 \mid C_{max}$ où G est un graphe ayant une partition de s cliques avec b sommets	M. Boudhar, G. Finke, 2000

Etat de l'art : cas $p_i = 1$, r_i arbitraires

Problèmes Polynomiaux

Problème	Référence
$P2 \vert AgrG=(V,E), p_i=1 \vert C_{max}$	Boudhar.M, Finke.G, 2000
$P2 \vert AgrG=(S_1,S_2;E), r_{S_2}=0, p_i=1 \vert C_{max}$	M. Boudhar, 2003
$P2 \vert AgrG=(S_1,S_2;S_1xS_2), r_i, p_i=1 \vert C_{max}$	M. Boudhar, 2003,
$P \vert AgrG=(S,K;E), p_i=1 \vert C_{max}$	M. Boudhar, G. Finke, 2000 M.Boudhar, 2005
$P \vert AgrG=(S,K;E), m \geq n, p_i=1 \vert C_{max}$	M. Boudhar, G. Finke, 2000 M. Boudhar, 2005
$P \vert AgrG=INT, p_i=1 \vert C_{max}$	G. Finke et al., 2008
$P \vert AgrG=(S,K;SxK), m \geq n, r_i, p_i=1 \vert C_{max}$	M. Boudhar, A. Khelladi, 2004

Etat de l'art : cas $p_i = 1$, r_i arbitraires

Problèmes Polynomiaux (suite)

Problème	Référence
$P\|AgrG{=}(V,E),m{\geq}n,p_i{=}1\|C_{max}$ où G est un graphe arc circulaire	M. Boudhar, G. Finke, 2000
$P\|AgrG{=}(V,E),m{\geq}\ n,p_i{=}1\|C_{max}$ où G est un graphe triangulé	M. Boudhar, G. Finke, 2000
$P\|AgrG{=}(V,E),m{\geq}n,p_i{=}1\|C_{max}$ où G est un graphe de comparabilité	M. Boudhar, G. Finke, 2000

Plan de l'exposé

Cas de deux machines, $p_i \in \{1, 2, 3\}$: généralisation

Bendraouche et Boudhar ont montré [2012] que dans le cas de deux machines, $p_i \in \{1, 2, 3\}$, le problème SWA est NP-difficile pour la classe des graphes de concordance bipartis arbitraires. Dans le résultat suivant nous généralisons ce résultat comme suit :

Théorème

Le problème SWA avec deux machines et $p_i \in \{1, 2, 3\}$ est NP-difficile pour toute classe de graphes de concordance C_ϕ : $G = (A \cup B, E)$ où A est un stable avec $|A| = 2a$ et B est un ensemble de cardinalité $2a - b$ dont le sous graphe engendré possède une stucture spécifique ϕ. Les paramètres a et b sont deux entiers arbitraires satisfaisant $b \leq a$.

Classes particulières, $m = 2$ et $p_i \in \{1, 2, 3\}$

- Si le sous graphe engendré par B est un graphe discret, on retrouve la NP-difficulté de SWA pour le cas des graphes bipartis arbitraires.
- Si le sous graphe engendré par B est un graphe complet, on obtient un résultat analogue pour les graphes scindés arbitraires.
- Comme un graphe scindé est un graphe d'intervalle, on obtient aussi un résultat analogue pour les graphes d'intervalles arbitraires.

Cas de deux machines, $p_i \in \{1,2\}$, $r_i \in \{0,r\}$

Bendraouche et Boudhar ont montré [2012] que SWA est NP-difficile pour $m = 2$, graphe biparti arbitraire, $p_i \in \{1,2\}$ et $r_i \in \{0,r\}$. Le théorème suivant est une généralisation.

Théorème

Le problème SWA avec deux machines, $p_i \in \{1,2\}$ et $r_i \in \{0,r\}$ (r arbitraire) est NP-difficile pour toute classe de graphes de concordance C_ϕ : $G = (A \cup B, E)$ où A est un stable avec $|A| = 2a$ et B est un ensemble de cardinalité $2a - b$ dont le sous graphe engendré possède une stucture spécifique ϕ. Les paramètres a et b sont deux entiers arbitraires satisfaisant $b \leq a$.

Remarque

Comme dans le théorème précédent, on obtient des résultats de NP-difficulté analogues pour les classes particulières citées.

Plan de l'exposé

Cas des graphes scindés : un sous problème polynomial

Théorème

Dans le cas de deux machines, le problème SWA pour les split graphes arbitraires $G = (K; S, E)$, est polynomial quand les durées de traitement des tâches de la clique K sont égales à 1 et celles du stable S sont arbitraires et se resout par un algorithme en $O(n^3)$.

Cas des graphes scindés : un sous problème polynomial

Théorème

Dans le cas de deux machines, le problème SWA pour les split graphes arbitraires $G = (K; S, E)$, est polynomial quand les durées de traitement des tâches de la clique K sont égales à 1 et celles du stable S sont arbitraires et se resout par un algorithme en $O(n^3)$.

Remarque

Ce théorème généralise un résultat dû à Bodlaender et Jansen (1995).

Plan de l'exposé

Complémentaire de graphes bipartis : $m = n$, $p_i = p$, $r_i \in \{0, r\}$: sous problème polynomial

Théorème

Le problème SWA est polynomial quand le graphe de concordance est le complémentaire d'un graphe biparti arbitraire, avec des durées de traitement identiques ($p_i = p$), deux dates de disponibilités distinctes ($r_i \in \{0, r\}$) et $m = n$.

Plan de l'exposé

Inapproximabilité

Théorème

Si $P \neq NP$, le problème SWA dont le graphe de concordance est le complémentaire d'un graphe biparti arbitraire avec $p_i = 1$ et $r_i \in \{0, 1, 2\}$, n'est pas $4/3 - \epsilon$ approximable pour tout $\epsilon > 0$, même si $m = n$.

Even et al [2009] ont montré que pour $m = 2$, il n'existe aucun algorithme d'approximation polynomial A pour SWA avec performance de guarantie $|A(I) - OPT(I)| \leq K$, pour toute constante fixe K. Nous avons généralisé ce résultat comme suit :

Théorème

Si $P \neq NP$ alors pour tout sous problème NP-difficile de SWA il n'existe aucun algorithme d'approximation polynomial A tel que $|A(I) - OPT(I)| \leq K$, pour toute constante fixe K.

Approximabilité

Théorème

Le problème SWA dont le graphe de concordance est le complémentaire d'un graphe biparti arbitraire avec durées de traitement identiques $p_i = p$, $m = n$ *et dates de disponibilités arbitraires, possède un algorithme d'approximation polynomial* A *avec une performance de guarantie* $|A(I) - OPT(I)| \leq p$.

Plan de l'exposé

Graphes bipartis, $p_i \in \{1, 3\}$ et $p_i \in \{2, 3\}$

Théorème

Le problème SWA $P2|AgreeG = (S_1, S_2; E), p_i \in \{1, 3\}|C_{max}$ *est NP-difficile.*

Théorème

Le problème SWA $P2|AgreeG = (S_1, S_2; E), p_i \in \{2, 3\}|C_{max}$ *est NP-difficile.*

Plan de l'exposé

Conclusion

- Dans ce travail, nous avons étudié le problème d'ordonnancement de tâches sur des machines parallèles et identiques sous contraintes de concordance de tâches dont le but est de minimiser le makespan, noté SWA.
- Dans le cas de deux machines et $p_i \in \{1, 2, 3\}$, nous avons généralisé deux résultats de NP-complétude de SWA pour les graphes de concordance arbitraires, à toute classe de graphes de concordance ayant une stucture spécifique.
- Pour le cas des complémentaires de graphes bipartis arbitraires , un sous problème polynomial a été présenté.
- Des résultats d'inapproximabilité et approximabilité ont été établi
- Nous avons montré que le problème SWA est NP-difficile pour les graphes bipartis, $p_i \in \{1, 3\}$ et $p_i \in \{2, 3\}$.

Merci de votre attention