

Université Abderrahmane Mira-Béjaia
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques

Etude Mathématique de systèmes non linéaires aux dérivées partielles modélisant des phénomènes mécaniques

DJABI Abdelmoumène

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Département de Mathématiques
Université A.MIRA de Béjaia

03 novembre 2016



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaia

Dérogée par : Pr. MEROUANI Abdelbaki et Dr.SERRAR Toufik

Avant-propos

Les travaux de thèse ont fait l'objet des trois publications :

- Abdelmoumene Djabi, Abdelbaki Merouani, *Bilateral contact problem with friction and wear for an electro elastic-viscoplastic materials with damage*, Taiwanese J. Math., Vol. 19, No. 4, pp. 1161-1182, August 2015.
- Abdelmoumene Djabi, Abdelbaki Merouani, *A fixed point method for a class of nonlinear evolution systems modeling a mechanical phenomenon*, Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 8, No. 1, March 2015. p 1–13.
- Abdelmoumene Djabi, Abdelbaki Merouani, Adel Aissaoui, A *frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. No. 27(2015), p 1-18.



Plan de travail

- 1 Introduction
- 2 Problèmes variationnels abstraits
- 3 Cadres physiques- phénomènes mécaniques
- 4 Etude mathématique de problèmes mécaniques
- 5 Conclusions et perspectives



Introduction



En général les systèmes aux dérivées partielles associés aux conditions aux limites sont gouvernés par des équations et inéquations variationnelles elliptiques ; paraboliques et hyperboliques.

Les EDP associées à certains opérateurs fournissent des modèles mathématiques de quantité phénomènes ; physiques , mécaniques (élasticité, plasticité,.....).

Dans cet exposé ; on s'intéresse à des systèmes d'EDP dont les inconnues et les données ont une interprétation mécanique.



- ▶ **Objectifs** : Une étude complète d'un problème mécanique comprend :
 - Modélisation mathématique : Système d'EDP décrivant l'évolution du phénomène mécanique.
 - Etude théorique : (existence, unicité de la solution) du modèle mathématique.
 - Etude numérique : solution approchée du modèle .



1 Modélisation mathématique

La modélisation d'un phénomène mécanique est déterminée par un ensemble d'hypothèses.

Parmi les hypothèses qui influent le système EDP, il y'a :

- Le processus mécanique (quasistatique ou dynamique).
- Le comportement du matériau (purement mécanique, électromécanique, thermomécanique).
- Les conditions aux limites sur la surface de contact (frottement, adhésion, usure,...)



2 Analyse variationnelle

L'analyse variationnelle des modèles comprend la formulation faible des modèles ainsi que les résultats d'existence et d'unicité de la solution.

3 Approche numérique

L'Approche numérique des problèmes aux limites est basée sur une "discrétisation" des équations et inéquations dont l'idée est d'approcher la solution. On distingue deux types de discrétisation :

- Discrétisation incomplète : consiste à discrétiser seulement l'espace.
- Discrétisation complète : consiste à discrétiser l'espace et l'intervalle de temps.



Problèmes variationnels abstraits



► Types fondamentaux d'équations et inéquations variationnelles

- Les équations et inéquations elliptiques (qui servent typiquement à décrire des phénomènes d'équilibre en physique) pour les problèmes stationnaires.
- Les équations et inéquations paraboliques (qui permettent de décrire des phénomènes de diffusion).
- Les équations et inéquations hyperboliques (qui permettent de décrire les phénomènes de propagation) pour les problèmes d'évolution.



► Les équations et inéquations elliptiques

On considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$ et de norme $\|\cdot\|_H$

① Equations variationnelles elliptiques

On considère $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive
Trouver $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = (f, v)_H \quad \forall v \in H, \quad (1)$$

- **Application** : L'évolution du potentiel électrique



2 Inéquations variationnelles elliptiques

On considère $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire

- Inéquation variationnelle elliptique de première espèce

Trouver $u \in H$ tel que

$$(Au, v - u)_H \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H, \quad (2)$$

- Inéquation variationnelle elliptique de deuxième espèce

Trouver $u \in H$ tel que

$$(Au, v - u)_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H, \quad (3)$$

Avec $\varphi : H \rightarrow]-\infty, +\infty[$ fonction propre



3 Inéquations quasivariationnelles elliptiques

On considère le problème suivant :

Trouver $u \in H$ tel que

$$(Au, v - u)_H + \varphi(u, v) - \varphi(u, u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H, \quad (4)$$

Pour le cas des inéquations elliptique quasivariationnelles la fonctionnelle est définie $\varphi : H \times H \rightarrow]-\infty, +\infty[$

- **Application** : Le contact avec frottement de coulomb et usure.



2 Inéquations variationnelles paraboliques

On considère le problème suivant :

Trouver $u \in L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V')$ tel que

$$\begin{cases} u(t) \in K \\ (\dot{u}, v - u)_{V' \times V} + (Au, v - u)_H \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in K, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (6)$$

- **Application** : L'évolution de l'endommagement.



► Systèmes variationnels abstraits

Les deux systèmes qui nous intéressent modélisent l'équilibre d'un corps déformable électromécanique (respectivement thermomécanique) avec endommagement soumis à des conditions aux limites de contact avec frottement et usure.

On s'intéresse aux systèmes suivants :

- Le système (\mathcal{S}_1)

Le système (\mathcal{S}_1) comprend

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} \text{inéquation quasivariationnelle elliptique (4) en terme inconnue } u, \\ \text{équation variationnelle elliptique (1) en terme inconnue } \varphi, \\ \text{inéquation variationnelle parabolique (6) en terme inconnue } \beta. \end{cases}$$



- Le système (\mathcal{S}_2)

Le système (\mathcal{S}_2) comprend

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} \text{inéquation quasivariationnelle elliptique (4) en terme inconnue } u, \\ \text{équation variationnelle parabolique (5) en terme inconnue } \theta, \\ \text{inéquation variationnelle parabolique (6) en terme inconnue } \beta. \end{cases}$$

Cadres physiques- phénomènes mécaniques



• **Cadre physique 1** (associé à (\mathcal{S}_1)) . (Problème électro-mécanique)

On considère Ω est un domaine borné et lipschitzien de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), de frontière Γ , nous considérons une partition Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a et Γ_b tel que $mes\Gamma_1 > 0$ et $mes\Gamma_a > 0$ et $\Gamma_3 \subset \Gamma_b$.

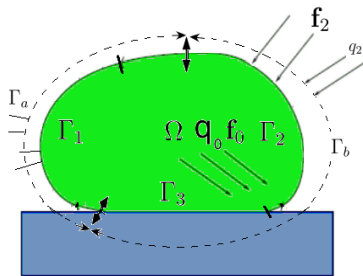


Figure : Problème électro-mécanique



- **Cadre physique 2.** (associé à (S_2)). (*Problème thermo-mécanique*)

On considère Ω est un domaine borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, de frontière Γ , nous considérons une partition Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , tel que $mes\Gamma_1 > 0$.

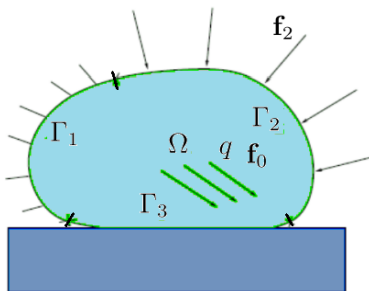


Figure : Problème thermo-mécanique



► Modèle mathématique

En générale le modèle mathématique d'un solide déformable multidisciplinaire (électromécanique ou thermomécanique) soumis à des efforts extérieurs purement mécanique ou couplés est gouverné par un système d'EDP comprenant :

- 1 Equation du mouvement (ou équilibre). (mécanique et électrique ou mécanique et thermique)
- 2 Loi de comportement du corps.
- 3 Conditions aux limites.(purement mécanique ou électrique et mécanique ou thermique et mécanique)
- 4 Des phénomènes additionnels (endommagement, temperature, usure,...)
- 5 Conditions initiales.



1 Equations de mouvement et d'équilibre

- Equation d'équilibre mécanique

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0 \quad (7)$$

- Equation d'équilibre électrique

$$\text{div} \mathbf{D} - q_0 = 0 \quad (8)$$

- Equations d'énergie (mouvement thermique)

$$\text{div} q - r = \dot{\theta} \quad (9)$$



2 Lois de comportement

On utilise deux lois de comportement

- ▶ Loi de comportement électro-elasto-viscoplastique avec endommagement

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) \\ & - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s))) ds - \mathcal{E}^* E(\varphi), \\ \mathbf{D} = & \mathcal{E}\varepsilon(u) + BE(\varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

- ▶ Loi de comportement thermo-elasto-viscoplastique avec endommagement

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u})) + \mathcal{B}(\varepsilon(u), \beta) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s))) ds$$



3 Conditions aux limites de contact

► Frottement de Coulomb :

- Cas statique

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu| \\ -\sigma_\tau = \mu|\sigma_\nu| \frac{u_\tau}{\|u_\tau\|} \text{ si } u_\tau \neq 0 \end{cases} \quad (12)$$

- Cas quasistatique

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu| \\ -\sigma_\tau = \mu|\sigma_\nu| \frac{\dot{u}_\tau}{\|\dot{u}_\tau\|} \text{ si } \dot{u}_\tau \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$



► Usure

L'évolution de l'usure de la surface de contact est donnée par une version simplifiée de la loi de Archard (voir Strömberg[22])

$$\dot{w} = -k\sigma_\nu \|\dot{u}_\tau - \mathbf{v}^*\|, \quad (14)$$

$k > 0$: est un coefficient d'usure,

\mathbf{v}^* : est la vitesse tangentielle de la fondation,

$\|\dot{u}_\tau - \mathbf{v}^*\|$: vitesse de glissement entre la surface de contact et la fondation.



Nous introduisons la fonction de l'usure $w : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui mesure l'usure de la surface.

$$u_\nu = -w, \text{ sur } \Gamma_3. \quad (15)$$

► Conditions de contact avec usure et frottement de Coulomb

$$-\sigma_\nu = \alpha \|\dot{u}_\nu\|, \quad \|\sigma_\tau\| = -\mu \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda \geq 0. \quad (16)$$



4 Les phénomènes additionnels

► Endommagement

Phénomène qui affecte directement la structure des corps

• Endommagement élastique :

Pour un matériau élastique, viscoélastique, elasto-viscoplastique,....

$$\dot{\beta} - k_1 \Delta \beta + \partial \varphi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta), \quad (17)$$



► Température

La thermomécanique s'intéresse aux effets de chaleur sur les contraintes et déformations et vice versa. Les contraintes et déformations proviennent des forces mécaniques et aussi des variations de température.

- Evolution de la température (corps thermo-elasto-viscoplastique)

$$\dot{\theta} - k_0 \Delta \theta = \psi(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\dot{u}), \theta) + q, \quad (18)$$



Problème \mathcal{P}^1 . Trouver $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$,
 $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{D} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $\beta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (19)$$

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\varepsilon(u) - B\nabla(\varphi) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (20)$$

$$\dot{\beta} - k_1 \Delta \beta + \partial \varphi_K(\beta) \ni S(\varepsilon(u), \beta), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (21)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (22)$$

$$\text{div} \mathbf{D} - q_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (23)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (24)$$



$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \nu = -\alpha \|\dot{u}_\nu\|, \quad \|\sigma_\tau\| = -\mu \sigma \nu \\ \sigma_\tau = -\lambda (\dot{u}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda \geq 0, \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (37)$$

$$k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + B\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (38)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (39)$$

$$u(0) = u_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \beta(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (40)$$



► Hypothèses

Les hypothèses qui influencent sur les problèmes (\mathcal{P}^1) et (\mathcal{P}^2) sont :

- 1 Hypothèses sur la géométrie du solide Ω .
- 2 Hypothèses sur le comportement (nature) du matériau Ω (loi de comportement).
- 3 Hypothèses sur les conditions de contact (avec frottement, sans frottement, unilatéral, bilatéral,...).
- 4 Hypothèses sur les phénomènes additionnels accompagnés (usure, endommagement, température,).
- 5 Hypothèses sur les conditions initiales.



Etude mathématique de problèmes mécaniques



► Hypothèses (\mathcal{P}^1)

① Hypothèses sur la géométrie du solide :(cadre physique 1)

② Hypothèses sur le comportement :

• Comportement mécanique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'opérateur } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ fortement monotone} \\ \text{et de Lipschitz par rapport à } \varepsilon. \\ \text{L'opérateur } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ de Lipschitz par rapport à } \varepsilon \text{ et } \beta. \\ \text{L'opérateur } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ de Lipschitz par rapport à } \sigma, \varepsilon. \\ \text{Les applications } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon), x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon, \alpha) \text{ et } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon) \\ \text{sont lebesgue mesurables sur } \Omega, \forall \varepsilon, \sigma \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}. \\ x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}, x \mapsto \mathcal{B}(x, 0, 0) \in \mathcal{H} \text{ et } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (41)$$

• Comportement électrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'opérateur } \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ symétrique par rapport à } \varepsilon. \\ \text{L'opérateur } B = (B_{ij}) : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ symétrique défini positive} \\ \text{par rapport à } \varphi. \\ \mathcal{E} = e_{ijk} = e_{ikj} \in L^\infty(\Omega) \text{ et } B = B_{ij} = B_{ji} \in L^\infty(\Omega), 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right.$$



3 Hypothèses sur le contact :

$$\begin{cases} q_2(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \forall t \in [0, T] \\ \alpha \in L^\infty(\Gamma_3), \alpha(x) \geq \alpha^* > 0, \text{p.p. sur } \Gamma_3, \\ \mu \in L^\infty(\Gamma_3), \mu(x) > 0, \text{p.p. sur } \Gamma_3. \end{cases} \quad (43)$$

4 Hypothèses sur les phénomènes additionnels :

$$\begin{cases} \text{La fonction } S : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de Lipschitz} \\ \text{par rapport à } \varepsilon \text{ et } \beta. \\ \text{L'application } x \mapsto S(x, \varepsilon, \alpha) \text{ est lebesgue mesurable} \\ \text{sur } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}. \\ x \mapsto S(x, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (44)$$

5 Hypothèses sur les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 \in V, \\ \beta_0 \in K. \end{cases}$$

► Hypothèses (\mathcal{P}^2)

① Hypothèses sur la géométrie du solide :(cadre physique 2)

② Hypothèses sur le Comportement :

• Comportement mécanique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'opérateur } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ fortement monotone} \\ \text{et de Lipschitz par rapport à } \varepsilon. \\ \text{L'opérateur } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ de Lipschitz par rapport à } \varepsilon \text{ et } \beta. \\ \text{L'opérateur } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ de Lipschitz par rapport à } \sigma, \varepsilon \\ \text{Les applications } x \mapsto \mathcal{A}(x, \varepsilon), x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon, \alpha) \text{ et } x \mapsto \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \theta) \\ \text{sont lebesgue mesurables sur } \Omega, \forall \varepsilon, \sigma \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}. \\ x \mapsto \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}, x \mapsto \mathcal{B}(x, 0, 0) \in \mathcal{H} \text{ et } x \mapsto \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (48)$$

• Comportement thermique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La fonction } \psi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ non linéaire et de Lipschitz} \\ \text{par rapport à } \sigma, \varepsilon \text{ et } \theta. \\ \text{L'application } x \mapsto \psi(x, \sigma, \varepsilon, \theta) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \forall \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \theta \in \mathbb{R}. \\ \text{L'application } x \mapsto \psi(x, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right.$$



• **Problème \mathcal{P}_v^1 .**

Trouver $u : [0, T] \rightarrow V$, $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$, $\varphi : [0, T] \rightarrow W$,
 $\mathbf{D} : [0, T] \rightarrow H$ et $\beta : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega)$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(s)), \varepsilon(u(s))) ds + \mathcal{E}^* \nabla \varphi(t), \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (55)$$

$$(\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (56)$$



$$\begin{aligned} (\dot{\beta}(t), \zeta - \beta(t))_{L^2(\Omega)} + a_1(\beta(t), \zeta - \beta(t)) \\ \geq (S(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \zeta - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \quad (57) \\ \forall \zeta \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u(t)) - B\nabla\varphi(t), \quad (58)$$

$$(\mathbf{D}(t), \nabla\phi)_H = -(q(t), \phi)_W, \forall \phi \in W, \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (59)$$

$$u(0) = u_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (60)$$



- **Problème \mathcal{P}_V^2 .** Trouver $u : [0, T] \rightarrow V$, $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$, $\theta : [0, T] \rightarrow V$ et $\beta : [0, T] \rightarrow K$ tels que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{B}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)) \\ & + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \theta(s)) ds \end{aligned} \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (61)$$

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geq & (\mathbf{f}(t), v - \dot{u}(t))_V, \\ \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (62)$$



Théorème 4.1 (Voir A.Djabi, A.Merouani [9])

Sous les hypothèses de (\mathcal{P}^1) . et supposons que

$$\|\alpha\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \left(\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1 \right) < \alpha_0, \text{ où } \alpha_0 = \frac{m_A}{C_0^2}, \quad (66)$$

Alors, le problème \mathcal{P}_V^1 possède une solution unique qui satisfait

$$u \in C^1(0, T; V), \quad (67)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (68)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (69)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}), \quad (70)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (71)$$



Théorème 4.2 (Voir A.Djabi, A.Merouani et A. Aissaoui [10])

Supposons que les hypothèses de (\mathcal{P}^2) et (66) soient vérifiées. Alors, le problème \mathcal{P}_V^2 possède une solution unique qui satisfait

$$u \in \mathcal{C}^1(0, T; V), \quad (72)$$

$$\sigma \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (73)$$

$$\theta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \quad (74)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (75)$$



On cherche $(\mathcal{P}_{v,aux}^1)$ et $(\mathcal{P}_{v,aux}^2)$ dans le but d'appliquer les équations et inéquations variationnelles de (S_1) et (S_2) .

Pour $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$, $g \in \mathcal{C}(0, T; V)$ et $\kappa \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$:

Problème $\mathcal{P}_{v,aux}^1$: Trouver $v_{\eta,g} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$, $\varphi_\eta : [0, T] \rightarrow W$ et $\beta_\kappa : [0, T] \rightarrow K$ tels que

$$(S'_1) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{\eta,g}^1 \text{ (inq4)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\eta,g}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_{\eta,g}(t))) + \eta(t), \\ (\sigma_{\eta,g}(t), \varepsilon(v - v_{\eta,g}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g(t), v) - j(g(t), v_{\eta,g}(t)) \\ \geq (f(t), v - v_{\eta,g}(t))_V, \end{array} \right. \\ \\ \mathcal{P}_{\varphi_\eta}^1 \text{ (eq1)} \quad \{ (B \nabla \varphi_\eta(t), \nabla \phi)_H = (q(t), \phi)_W + (\mathcal{E} \varepsilon(u_\eta(t)), \nabla \phi)_H \\ \\ \mathcal{P}_{\beta_\kappa}^1 \text{ (inq6)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\beta}_\kappa(t), \zeta - \beta_\kappa(t))_{L^2(\Omega)} + \mathbf{a}_1(\beta_\kappa(t), \zeta - \beta_\kappa(t)) \\ \geq (\kappa, \zeta - \beta_\kappa(t))_{L^2(\Omega)}, \\ \beta_\kappa(0) = \beta_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \forall \phi \in W, v \in V, \zeta \in K \text{ et } t \in [0, T] \end{array} \right. \end{array} \right.$$



Pour $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$, $g \in \mathcal{C}(0, T; V)$, $\chi \in \mathcal{C}(0, T; V')$ et $\kappa \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$:

Problème $\mathcal{P}_{v,aux}^2$: Trouver $v_{\eta,g} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$, $\theta_\chi : [0, T] \rightarrow V$ et $\beta_\kappa : [0, T] \rightarrow K$ tels que

$$(S'_2) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{\eta,g}^2 \text{ (inq4)} \\ \mathcal{P}_\chi^2 \text{ (eq5)} \\ \mathcal{P}_{\beta_\kappa}^2 \text{ (inq6)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\eta,g}(t) = \mathcal{A}(\varepsilon(v_{\eta,g}(t))) + \eta(t), \\ (\sigma_{\eta,g}(t), \varepsilon(v - v_{\eta,g}(t)))_{\mathcal{H}} + j(g(t), v) - j(g(t), v_{\eta,g}(t)) \\ \geq (f(t), v - v_{\eta,g}(t))_V, \\ \\ (\dot{\theta}_\chi(t), v)_{V' \times V} + a_0(\theta_\chi(t), v) = \langle \chi(t) + q(t), v \rangle_{V' \times V}, \\ \theta_\chi(0) = \theta_0, \text{ dans } \Omega. \\ \\ (\dot{\beta}_\kappa(t), \zeta - \beta_\kappa(t))_{L^2(\Omega)} + a_1(\beta_\kappa(t), \zeta - \beta_\kappa(t)) \\ \geq (\kappa, \zeta - \beta_\kappa(t))_{L^2(\Omega)}, \\ \beta_\kappa(0) = \beta_0 \text{ dans } \Omega. \\ \forall v \in V, \zeta \in K \text{ et } t \in [0, T] \end{array} \right.$$



Le système (S'_1) comprend :

- Une inéquation quasivariationnelle elliptique (4), modélisant le **contact avec frottement et usure** d'un corps **électro elasto-viscoplastique avec endommagement** et une fondation.
- Une équation variationnelle elliptique de la forme (1), modélisant l'évolution du **potentiel électrique**.
- Une inéquation variationnelle parabolique de la forme (6), modélisant l'évolution de l'**endommagement**.



Le système (S'_2) comprend :

- Une inéquation quasivariationnelle elliptique (4), modélisant le **contact avec frottement et usure** d'un corps **thermo-elasto-viscoplastique avec endommagement** et une fondation.
- Une équation variationnelle parabolique de la forme (5), modélisant l'évolution de la **température**.
- Une inéquation variationnelle parabolique de la forme (6), modélisant l'évolution de l'**endommagement**.



(\mathcal{S}'_1) et (\mathcal{S}'_2) s'écrivent sous la forme (\mathcal{S}_1) et (\mathcal{S}_2) respectivement. La démonstration se fait en trois étapes :

- **Première étape**

Obtention de u_η

Lemme 4.3

Pour tout $\eta \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H})$ et $g \in \mathcal{C}(0, T; V)$, le problème $\mathcal{P}_{\eta, g}^1$ possède une solution unique satisfaite

$$u_\eta \in \mathcal{C}^1(0, T; V),$$



- **Deuxième étape**

Obtention de φ_η

Lemme 4.4

$\mathcal{P}_{\varphi_\eta}^1$ a une solution unique φ_η qui satisfait la régularité (69).

- **Troisième étape**

Obtention de β_κ

Lemme 4.5

Pour tout $\kappa \in \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$, Il existe une unique solution β_κ du Problème $\mathcal{P}_{\beta_\kappa}^1$ satisfait (71).

Pour (S'_2) , la démonstration se fait en trois étapes :

- **Première étape**

Obtention de u_η d'une façon similaire de (S'_1)

- **Deuxième étape**

Obtention de θ_χ du problème $\mathcal{P}_{v,aux}^2$

Lemme 4.7

\mathcal{P}_χ^2 a une solution unique θ_χ qui satisfait la régularité (74).

- **Troisième étape**

Obtention de β_κ d'une façon similaire de (S'_1) .

Pour le problème \mathcal{P}_v^2 , on considère l'élément Λ tel que :
 $\Lambda : \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$ défini par

$$\Lambda(\eta, \chi, \kappa)(t) = (\Lambda_1(\eta, \chi, \kappa)(t), \Lambda_2(\eta, \chi, \kappa)(t), \Lambda_3(\eta, \chi, \kappa)(t)), \quad (79)$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\eta, \chi, \kappa)(t) &= \mathcal{B}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\kappa(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_\eta(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}_\eta(s))), \varepsilon(u_\eta(s), \theta_\chi(t))) ds, \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \quad (80)$$

$$\Lambda_2(\eta, \chi, \lambda)(t) = \psi(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\kappa(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad (81)$$

$$\Lambda_3(\eta, \chi, \lambda)(t) = S(\sigma_\eta, \varepsilon(\dot{u}_\eta), \theta_\chi), \quad \forall t \in [0, T] \quad (82)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 4.8 (Voir A.Djabi, A.Merouani et A. Aissaoui [10])

Soit (74) vérifiée. Alors pour $(\eta, \chi, \kappa) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$, l'application $\Lambda(\eta, \chi, \kappa) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega)$ a un élément unique $(\eta^, \chi^*, \kappa^*) \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{H} \times V' \times L^2(\Omega))$ tel que*

$$\Lambda(\eta^*, \chi^*, \kappa^*) = (\eta^*, \chi^*, \kappa^*)$$

► Approche numérique

1 Discrétisation de temps :

- Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, une partition de l'intervalle de temps $[0, T]$.
- Soit $k = T/N$ le pas de discrétisation et $t_n = nk$ les nœuds pour $n = 0, 1, \dots, N$.
- Pour une fonction continue $t \rightarrow v(t)$ on utilise la notation $v_n(t) = v(t_n)$.

2 Discrétisation de l'espace :

- Soit V^h, W^h et K^h des espaces de fonctions affines continues par morceaux et qui sont de dimension finie.
- Pour une fonction continue $t \rightarrow v(t)$, on utilise la notation $v_n^h(t) = v^h(t_n)$ pour l'élément approché de $v_n(t)$.



3 Notations :

- On utilise la notation $v(t) = \dot{u}(t)$. Alors $u(t) = \int_0^t v(s) ds + u_0$, $t \geq 0$.
- $\{v_n^{hk}, \varphi_n^{hk}, \beta_n^{hk}\}$ les solutions approchées de $\{v, \varphi, \beta\}$.

4 Objectif :

- Calcul de l'estimation des erreurs numériques $\|v_n - v_n^{hk}\|_V$, $\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W$ et $\|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)}$.



5 Majorations :

- Nous avons les propriétés d'approximation suivantes des éléments finis dans les espaces V^h , W^h et K^h (voir [2, 7, 13])

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\phi_n^h \in W^h} \|\varphi_n - \phi_n^h\|_W \leq ch \|\varphi\|_{C(0,T;H^2(\Omega))}, \\ \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{w_n^h \in V^h} \|u_n - w_n^h\|_V \leq ch \|u\|_{C^1(0,T;H^2(\Omega)^d)}, \\ \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{w_n^h \in V^h} \|v_n - w_n^h\|_V \leq ch^2 \|u\|_{C^1(0,T;H^2(\Omega)^d)}, \\ \max_{0 \leq n \leq N} \inf_{\zeta_n^h \in K^h} \|\beta_n - \zeta_n^h\|_K \leq ch \|\beta\|_{C(0,T;H^2(\Omega))}, \end{array} \right. \quad (83)$$

- Soient les conditions initiales discrètes $u_0, \sigma_0, \varphi_0, \theta_0$ et β_0 définies par l'opérateur d'interpolation des éléments finis (voir [7]) :

$$u_0 = \Pi^h u_0, \quad \sigma_0 = P_{\mathcal{H}^h} \sigma_0, \quad \varphi_0 = \Pi^h \varphi_0, \quad \theta_0 = \Pi^h \theta_0, \quad \beta_0 = \Pi^h \beta_0,$$

6 Estimation de l'erreur :

Pour le problème \mathcal{P}_v^1

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|v_n - v_n^{hk}\|_V + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_{\mathcal{H}} + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ & + k \left[\sum_{j=1}^N \|\nabla (\beta_j - \beta_j^{hk})\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right]^{1/2} \\ & \leq c(h + k) \end{aligned} \tag{85}$$

et pour le problème \mathcal{P}_v^2

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \left\{ \|v_n - v_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)} + \|\sigma_n - \sigma_n^{hk}\|_{\mathcal{H}} + \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta_n - \beta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ & + k \left(\sum_{j=1}^N \|\nabla (\beta_j - \beta_j^{hk})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^N \|\theta_j - \theta_j^{hk}\|_V^2 \right)^{1/2} \\ & \leq c(h + k) \end{aligned}$$



Conclusions et perspectives



➔ Conclusions

- ✓ Les équations et les inéquations dans le cadre abstrait peuvent modéliser plusieurs phénomènes.
- ✓ Les conditions compliquées de contact mènent à des équations et inéquations quasivariationnelles qui sont très utiles dans ce domaine.
- ✓ On a traité des problèmes très proches de la réalité (l'usure, le frottement, l'endommagement, les effets électriques, les effets thermiques).
- ✓ Les inégalités (85) et (86) vérifient que nous avons une convergence optimale pour la solution numérique.





Perspectives

Les perspectives pouvant être apportées à ce travail sont :

- Trouver des résultats dans le cadre abstrait afin de l'appliquer dans la résolution des problèmes de contact.
- Formulation des lois de comportement couplées entre plusieurs effets.
- L'utilisation d'autres versions des lois pour (le comportement de matériau, l'usure, le frottement, les effets électriques,...).
- L'utilisation d'autres méthodes numériques pour l'approximation des problèmes de contact.



- [1] C. Baiocchi , A. Capelo ; *Variational and Quasivariational Inequalities : Application to Free Boundary Problems*, Wiley-Interscience, Chichester-New York ; 1984.
- [2] M. Barboteu, J. Ramon, J.R. Fernandez, Y. Ouafik, *Numerical analysis of a frictionless viscoelastic piezoelectric contact problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 42 (2008), no. 4, 667–682.
- [3] V. Barbu ; *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984)
- [4] R.C Batra , J.S Yang ; *Saint Venant's principle in linear piezoelectricity*, *Journal of Elasticity*, 38(1995), 209-218.
- [5] H. Brézis ; *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application* , Masson, Paris (1987).
- [6] H. Brézis ; *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, *Annale de l'Institut Fourier*, Tome 18, n°1, (1968), 115-175.



- [7] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, in : P.G. Ciarlet, J.L.Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. II, North Holland, 1991, pp.17–352.
- [8] A. Djabi, A. Merouani, *A fixed point method for a class of nonlinear evolution systems modeling a mechanical phenomenon*, *Int. J. Open Problems Compt. Math.*, Vol. 8, No. 1(2015),p 1–13.
- [9] A. Djabi, A. Merouani, *Bilateral contact problem with friction and wear for an electro elastic-viscoplastic materials with damage*, *Taiwanese J. Math.* Vol. 19, No. 4(2015),p 1161–1182.
- [10] A. Djabi, A. Merouani, A. Aissaoui, *A frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects*, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*No.27(2015), p 1–18.
- [11] J. Jaresek, M. Sofonea, *On the solvability of dynamic elastic-visco-plastic contact problems*, *Z Angew Math Phys* (2008) 88 (2008)3-22.



- [12] G. Duvaut , J. L. Lions ; *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod (1976).
- [13] W. Han, M. Shillor , M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic problem with normal compliance, friction and damage* , Journal of Computational and Applied Mathematics 137 (2001) 377–398.
- [14] J. L. Lions ; *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod (1969).
- [15] A. Merouani, F. Messelmi ; *Dynamic Evolution of Damage in Elastic-Thermo-Viscoplastic Materials*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), No. 129, pp. 1-15.
- [16] F. Messelmi , B. Merouani ; *Quasi-Static Evolution of Damage in Thermo-Viscoplastic Materials*, Analele Universității Oradea, Fasc. Mathematica, Tome XVII (2010), Issue No. 2, 133-148.
- [17] J Nečas, I Hlavaček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.



- [18] M. Selmani, L. Selmani; *Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic material*. Nonlinear Analysis : Modelling and Control, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117
- [19] M. Sofonea ; *Functional Methods in Thermo-Elasto-Visco-Plasticity*, Ph. D. Thesis, Univ of Buccharest, (1988) (in Romanian).
- [20] M. Sofonea, *Error Estimate of a numerical method for a class of a evolution equations*, Rev. Colombiana Mat., Vol.27, No.3-4, (1993), pp.253-265.
- [21] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1982.
- [22] N. Strömberg, L. Johansson, A. Klarbring, *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear*, Int. J. Solids Structures, 33(1996), 1817–1836.



Merci pour votre attention